



Aufgabe M09A1

Bei einer intramuskulären Injektion hängt die messbare Konzentration f_k (in mg pro Liter) des injizierten Medikaments im Blut u. a. von der Zeit x (Angaben in Stunden) seit der Injektion ab.

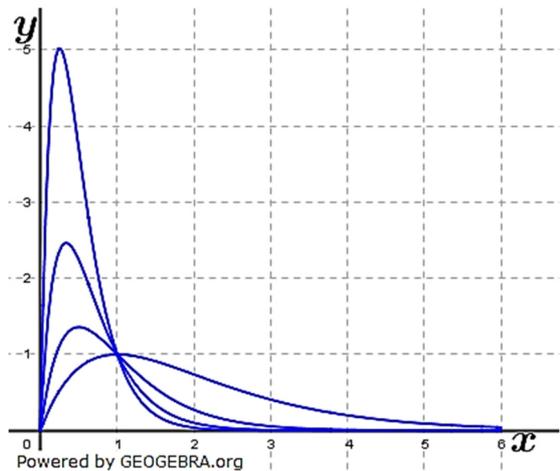
Sie ist außerdem abhängig von zahlreichen weiteren Faktoren (z. B. der unterschiedlichen Konstitution des Menschen) und lässt sich durch Änderungen der physikalisch-chemischen Zusammensetzung beeinflussen (Parameter k).

Für f_k gilt: $f_k(x) = x \cdot e^{-k \cdot x + k}; x \geq 0; k \geq 0.$

Im Folgenden wird zunächst der Fall $k = 2$ untersucht.

- a) Bestimmen Sie (für $k = 2$) rechnerisch und numerisch den Zeitpunkt, zu dem die maximale Arzneimittelkonzentration im Blut erreicht ist, sowie die maximale Arzneimittelkonzentration.
- b) Untersuchen Sie (für $k = 2$) rechnerisch und numerisch, zu welchem Zeitpunkt die Geschwindigkeit, mit der sich die Arzneimittelkonzentration ändert, extremal ist, sowie die maximale Änderungsgeschwindigkeit. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f_k für $x \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Medikaments. Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

- c) Die Abbildung zeigt die Graphen von f_k für $k = 1$ bis $k = 4$. Ordnen Sie die Parameterwerte den entsprechenden Graphen zu. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen im Sachzusammenhang. Untersuchen Sie, welche Aussagen sich hinsichtlich des Einflusses von k machen lassen. (Beachten Sie auch Ihre Ergebnisse von a) und b).



- d) Zeigen Sie, dass es genau einen Zeitpunkt $x > 0$ gibt, bei dem die Arzneimittelkonzentration für alle verschiedenen Zusammensetzungen (d. h. die verschiedenen möglichen Parameterwerte) gleich ist und geben Sie diese Konzentration an.
- e) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_k mit $F_k(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot (kx + 1) \cdot e^{-k \cdot x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
- f) Bestimmen Sie für $k = 2$ rechnerisch die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(2)$ in den ersten beiden Stunden.

Lösung M09A1

Lösungslogik

a) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentration:*

Hinweis:

Die Aufgabenstellung „rechnerisch und numerisch“ bedeutet, dass hier nicht einfach das Maximum mittels WTR gesucht werden soll, sondern das echt gerechnet wird.

Wir bestimmen $f_2'(x)$ und $f_2''(x)$, setzen $f_2'(x)$ auf Null, lösen nach x auf und prüfen über die Art der Extremstelle und bestimmen dann noch die maximale Arzneimittelkonzentration über $f_2(x)$.

b) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentrationsänderung:*

Gefragt ist hier die Änderungsrate, deren Funktionsgleichung wir mit bereits berechnet haben. Gesucht ist der Hochpunkt dieser Änderungsrate. Wir bestimmen noch $f_2'''(x)$, setzen $f_2''(x)$ auf Null, lösen nach x auf und prüfen über die Art des Extrempunktes. Danach bestimmen wir über die maximale Arzneimittelkonzentrationsänderung.

Verhalten der Funktion f_k für $x \rightarrow \infty$:

Wir prüfen, ob die Funktion gegen einen Grenzwert läuft für $x \rightarrow \infty$.

c) *Zuordnung von Graphen von f_k :*

Aus den Schaubildern ergeben sich unterschiedliche Stellen der Hochpunkte. Über $f_k'(x)$ können wir somit die Zuordnung feststellen.

Aussagen hinsichtlich des Einflusses von k :

Siehe Klausuraufschrieb.

d) *Zeitpunkt gleicher Konzentration:*

Obwohl aus der Graphik von Teilaufgabe c) ersichtlich ($x = 1$ mit $f_k(x) = 1$), ist hier der rechnerische Nachweis gefordert.

Wir bestimmen den Schnittpunkt von $f_{k_1}(x)$ mit $f_{k_2}(x)$ und stellen fest, dass die Schnittstelle unabhängig von k ist.

e) *Nachweis einer Stammfunktion:*

Zwar könnte man mittels partieller Integration die Stammfunktion ableiten, da dieses Verfahren aber nicht mehr zum Lehrumfang gehört, verbleibt hier nur noch die 1. Ableitung von $F_k(x)$ zu bilden.

f) *Mittlere Wirkstoffkonzentration :*

Dies ist das Mittelwertintegral von $f_k(x)$ im Intervall $I = [0; 2]$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 09

Klausuraufschrieb

a) **Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentration:**

$$f_2(x) = x \cdot e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$v = e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$v' = -2e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$f_2'(x) = e^{-2x+2} - 2x \cdot e^{-2x+2} = e^{-2x+2} \cdot (1 - 2x)$$

$$u = e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$u' = -2e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$v = 1 - 2x$$

$$v' = -2$$

$$f_2''(x) = -2e^{-2x+2}(1 - 2x) - 2 \cdot e^{-2x+2} = -2e^{-2x+2} \cdot (2 - 2x) = -4e^{-2x+2}(1 - x)$$

$$f_2'(x) = 0$$

$$e^{-2x+2} \cdot (1 - 2x) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

$$f_2''(0,5) = -4e(1 - 0,5) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f_2(0,5) = 0,5 \cdot e^{-1} \approx 1,359 \text{ mg/l}$$

Nach 30 Minuten ist die Arzneimittelkonzentration mit etwa 1,4 mg/l maximal.

b) **Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentrationsänderung:**

$$f_2''(x) = -4e^{-2x+2}(1 - x)$$

$$u = -4e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$u' = 8e^{-2 \cdot x + 2}$$

$$v = 1 - x$$

$$v' = -1$$

$$f_2'''(x) = 8e^{-2 \cdot x + 2} \cdot (1 - x) + 4e^{-2 \cdot x + 2} = 4e^{-2 \cdot x + 2}(2 - 2x + 1) = 4e^{-2 \cdot x + 2}(3 - 2x)$$

$$f_2''(x) = 0$$

$$-4e^{-2x+2}(1 - x) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_2'''(1) = 4e^0(3 - 2) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f_2'(1) = e^{-2+2} \cdot (1 - 2) = e^0 \cdot (-1) = -1$$

Nach einer Stunde ist der Wert der Arzneimittelkonzentrationsänderung mit etwa $-1 \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{h}}$ am geringsten.

Verhalten der Funktion f_k für $x \rightarrow \infty$:

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-kx+k} = 0$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$

Auf lange Sicht gesehen nähert sich die Arzneimittelkonzentration dem Wert 0.

c) **Zuordnung von Graphen von f_k :**

$$f_k(x) = x \cdot e^{-k \cdot x + k}$$

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$v = e^{-k \cdot x + k}$$

$$v' = -ke^{-k \cdot x + k}$$

$$f_k'(x) = e^{-kx+k} - kx \cdot e^{-kx+k} = e^{-kx+k} \cdot (1 - kx)$$

$$f_k'(x) = 0$$

$$e^{-kx+k} \cdot (1 - kx) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$(1 - kx) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k}$$

Je größer k umso näher liegt der Hochpunkt an $x = 0$. Das Schaubild von f_4 hat die Extremstelle $x = \frac{1}{4}$ gefolgt von f_3 mit $x = \frac{1}{3}$, f_2 mit $x = \frac{1}{2}$ und f_1 mit $x = 1$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 09

Aussagen hinsichtlich des Einflusses von k :

Aus dem zuvor gesagten lässt sich schließen:

Je größer k , desto früher tritt die maximale Konzentration ein und desto höher ist sie.

Weiterhin gilt:

Je größer k , desto früher und schneller verläuft der Abbau.

d) *Zeitpunkt gleicher Konzentration:*

$$f_{k_1}(x) \cap f_{k_2}(x)$$

$$x \cdot e^{-k_1 \cdot x + k_1} = x \cdot e^{-k_2 \cdot x + k_2} \quad | \quad :x$$

$$e^{-k_1 \cdot x + k_1} = e^{-k_2 \cdot x + k_2} \quad | \quad \text{Division durch } x \text{ zulässig, da } x > 0 \text{ ist.}$$

$$(-k_1 \cdot x + k_1) \cdot \ln(e) = (-k_2 \cdot x + k_2) \cdot \ln(e)$$

$$-k_1 \cdot x + k_1 = -k_2 \cdot x + k_2 \quad | \quad +k_2 \cdot x; -k_1$$

$$k_2 \cdot x - k_1 \cdot x = k_2 - k_1 \quad | \quad x \text{ ausklammern}$$

$$x \cdot (k_2 - k_1) = k_2 - k_1 \quad | \quad : (k_2 - k_1)$$

$$x = 1$$

$$f_k(1) = 1 \cdot e^0 = 1$$

Nach einer Stunde beträgt die Arzneimittelkonzentration unabhängig von k 1 mg/l.

e) *Nachweis einer Stammfunktion:*

$$F_k(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot (kx + 1) \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$u = (kx + 1) \quad u' = k$$

$$v = e^{-k \cdot x} \quad v' = -k e^{-k \cdot x}$$

$$F_k'(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot (k \cdot e^{-k \cdot x} + (kx + 1) \cdot k e^{-k \cdot x}) \quad | \quad k \cdot e^{-k \cdot x} \text{ ausklammern}$$

$$= -\frac{k e^{-k \cdot x} \cdot e^k}{k^2 v} \cdot (1 + kx + 1)$$

$$= \frac{e^{-k \cdot x} \cdot e^k}{k} \cdot (-1 + kx + 1)$$

$$= \frac{e^{-k \cdot x + k}}{k} \cdot kx = x \cdot e^{-kx+k}$$

q.e.d.

f) *Mittlere Wirkstoffkonzentration :*

$$m(2) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 f_2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot [F_2(x)]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (F_2(2) - F_2(0))$$

$$m(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4} \cdot ((-2 \cdot 2 + 1) \cdot e^{-4} + (2 \cdot 0 + 1) \cdot e^0)$$

$$m(2) = \frac{e^2}{8} \cdot (-5e^{-4} + 1) = -\frac{e^2}{8} \cdot (5e^{-4} - 1) \approx 0,829$$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(2)$ beträgt etwa 0,829 mg/l.