



Aufgabe M09A1

Bei einer intramuskulären Injektion hängt die messbare Konzentration f_k (in mg pro Liter) des injizierten Medikaments im Blut u. a. von der Zeit x (Angaben in Stunden) seit der Injektion ab.

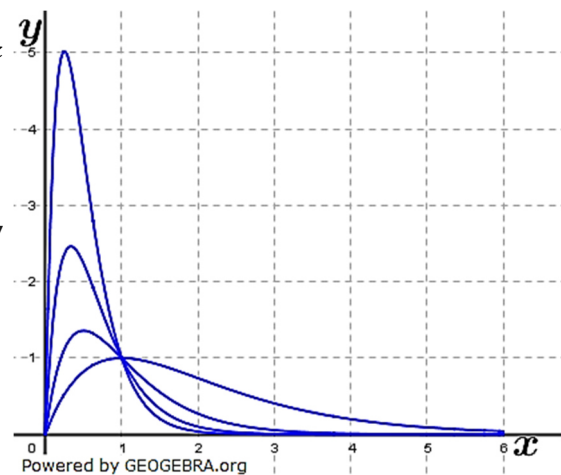
Sie ist außerdem abhängig von zahlreichen weiteren Faktoren (z. B. der unterschiedlichen Konstitution des Menschen) und lässt sich durch Änderungen der physikalisch-chemischen Zusammensetzung beeinflussen (Parameter k).

Für f_k gilt: $f_k(x) = x \cdot e^{-k \cdot x + k}; x \geq 0; k \geq 0.$

Im Folgenden wird zunächst der Fall $k = 2$ untersucht.

- a) Bestimmen Sie (für $k = 2$) rechnerisch und numerisch den Zeitpunkt, zu dem die maximale Arzneimittelkonzentration im Blut erreicht ist, sowie die maximale Arzneimittelkonzentration.
- b) Untersuchen Sie (für $k = 2$) rechnerisch und numerisch, zu welchem Zeitpunkt die Geschwindigkeit, mit der sich die Arzneimittelkonzentration ändert, extremal ist, sowie die maximale Änderungsgeschwindigkeit. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f_k für $x \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den langfristigen Abbau des Medikaments. Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

- c) Die Abbildung zeigt die Graphen von f_k für $k = 1$ bis $k = 4$. Ordnen Sie die Parameterwerte den entsprechenden Graphen zu. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen im Sachzusammenhang. Untersuchen Sie, welche Aussagen sich hinsichtlich des Einflusses von k machen lassen. (Beachten Sie auch Ihre Ergebnisse von a) und b).



- d) Zeigen Sie, dass es genau einen Zeitpunkt $x > 0$ gibt, bei dem die Arzneimittelkonzentration für alle verschiedenen Zusammensetzungen (d. h. die verschiedenen möglichen Parameterwerte) gleich ist und geben Sie diese Konzentration an.
- e) Weisen Sie nach, dass die Funktion F_k mit $F_k(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot (kx + 1) \cdot e^{-k \cdot x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
- f) Bestimmen Sie für $k = 2$ rechnerisch die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(2)$ in den ersten beiden Stunden.