Lösung M09A1

Lösungslogik

a) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentration:*
Hinweis:
Die Aufgabenstellung „rechnerisch und numerisch" bedeutet, dass hier nicht einfach das Maximum mittels WTR gesucht werden soll, sondern das echt gerechnet wird.
Wir bestimmen $f_2'(x)$ und $f_2''(x)$, setzen $f_2'(x)$ auf Null, lösen nach x auf und prüfen über die Art der Extremstelle und bestimmen dann noch die maximale Arzneimittelkonzentration über $f_2(x)$.

b) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentrationsänderung:*
Gefragt ist hier die Änderungsrate, deren Funktionsgleichung wir mit bereits berechnet haben. Gesucht ist der Hochpunkt dieser Änderungsrate. Wir bestimmen noch $f_2'''(x)$, setzen $f_2''(x)$ auf Null, lösen nach auf und prüfen über die Art des Extrempunktes. Danach bestimmen wir über die maximale Arzneimittelkonzentrationsänderung.
Verhalten der Funktion f_k für $x \to \infty$:
Wir prüfen, ob die Funktion gegen einen Grenzwert läuft für $x \to \infty$.

c) *Zuordnung von Graphen von f_k:*
Aus den Schaubildern ergeben sich unterschiedliche Stellen der Hochpunkte. Über $f_k'(x)$ können wir somit die Zuordnung feststellen.
Aussagen hinsichtlich des Einflusses von k:
Siehe Klausuraufschrieb.

d) *Zeitpunkt gleicher Konzentration:*
Obwohl aus der Graphik von Teilaufgabe c) ersichtlich ($x = 1$ mit $f_k(x) = 1$), ist hier der rechnerische Nachweis gefordert.
Wir bestimmen den Schnittpunkt von $f_{k_1}(x)$ mit $f_{k_2}(x)$ und stellen fest, dass die Schnittstelle unabhängig von k ist.

e) *Nachweis einer Stammfunktion:*
Zwar könnte man mittels partieller Integration die Stammfunktion aus herleiten, da dieses Verfahren aber nicht mehr zum Lehrumfang gehört, verbleibt hier nur noch die 1. Ableitung von $F_k(x)$ zu bilden.

f) *Mittlere Wirkstoffkonzentration :*
Dies ist das Mittelwertintegral von $f_k(x)$ im Intervall $I = [0; 2]$.

Klausuraufschrieb

a) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentration:*

$f_2(x) = x \cdot e^{-2\cdot x+2}$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = e^{-2\cdot x+2} \qquad v' = -2e^{-2\cdot x+2}$

$f_2'(x) = e^{-2x+2} - 2x \cdot e^{-2x+2} = e^{-2x+2} \cdot (1-2x)$

$u = e^{-2\cdot x+2} \qquad u' = -2e^{-2\cdot x+2}$

$v = 1-2x \qquad v' = -2$

$f_2''(x) = -2e^{-2x+2}(1-2x) - 2 \cdot e^{-2x+2} = -2e^{-2x+2} \cdot (2-2x) = -4e^{-2x+2}(1-x)$

$f_2'(x) = 0$

$e^{-2x+2} \cdot (1-2x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$1-2x = 0 \;=>\; x = 0{,}5$

$f_2''(0{,}5) = -4e(1-0{,}5) < 0$ => Hochpunkt

$f_2(0{,}5) = 0{,}5 \cdot e^{-1} \approx 1{,}359\, mg/l$

Nach 30 Minuten ist die Arzneimittelkonzentration mit etwa $1{,}4\, mg/l$ *maximal.*

b) *Zeitpunkt und Wert der maximalen Arzneimittelkonzentrationsänderung:*

$f_2''(x) = -4e^{-2x+2}(1-x)$

$u = -4e^{-2\cdot x+2} \qquad u' = 8e^{-2\cdot x+2}$

$v = 1-x \qquad v' = -1$

$f_2'''(x) = 8e^{-2\cdot x+2} \cdot (1-x) + 4e^{-2\cdot x+2} = 4e^{-2\cdot x+2}(2-2x+1) = 4e^{-2\cdot x+2}(3-2x)$

$f_2''(x) = 0$

$-4e^{-2x+2}(1-x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$1-x = 0 \;=>\; x = 1$

$f_2'''(1) = 4e^0(3-2) > 0$ => Tiefpunkt

$f_2'(1) = e^{-2+2} \cdot (1-2) = e^0 \cdot (-1) = -1$

Nach einer Stunde ist der Wert der Arzneimittelkonzentrationsänderung mit etwa $-1\frac{mg}{l\cdot h}$ *am geringsten.*

Verhalten der Funktion f_k *für* $x \to \infty$:

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-kx+k} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = 0$

Auf lange Sicht gesehen nähert sich die Arzneimittelkonzentration dem Wert 0.

c) *Zuordnung von Graphen von* f_k*:*

$f_k(x) = x \cdot e^{-k\cdot x+k}$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = e^{-k\cdot x+k} \qquad v' = -ke^{-k\cdot x+k}$

$f_k'(x) = e^{-kx+k} - kx \cdot e^{-kx+k} = e^{-kx+k} \cdot (1-kx)$

$f_k'(x) = 0$

$e^{-kx+k} \cdot (1-kx) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$(1-kx) = 0 \;=>\; x = \frac{1}{k}$

Je größer k umso näher liegt der Hochpunkt an $x = 0$. Das Schaubild von f_4 hat die Extremstelle $x = \frac{1}{4}$ gefolgt von f_3 mit $x = \frac{1}{3}$, f_2 mit $x = \frac{1}{2}$ und f_1 mit $x = 1$.

Aussagen hinsichtlich des Einflusses von k:
Aus dem zuvor gesagten lässt sich schließen:
Je größer k, desto früher tritt die maximale Konzentration ein und desto höher ist sie.
Weiterhin gilt:
Je größer k, desto früher und schnellet verläuft der Abbau.

d) *Zeitpunkt gleicher Konzentration:*

$f_{k_1}(x) \cap f_{k_2}(x)$

$x \cdot e^{-k_1 \cdot x + k_1} = x \cdot e^{-k_2 \cdot x + k_2} \quad | \quad : x$

$e^{-k_1 \cdot x + k_1} = e^{-k_2 \cdot x + k_2} \quad |$ Division durch x zulässig, da $x > 0$ ist.

$(-k_1 \cdot x + k_1) \cdot ln\,(e) = (-k_2 \cdot x + k_2) \cdot ln\,(e)$

$-k_1 \cdot x + k_1 = -k_2 \cdot x + k_2 \quad | \quad +k_2 \cdot x;\ -k_1$

$k_2 \cdot x - k_1 \cdot x = k_2 - k_1 \quad |$ x ausklammern

$x \cdot (k_2 - k_1) = k_2 - k_1 \quad | \quad : (k_2 - k_1)$

$x = 1$

$f_k(1) = 1 \cdot e^0 = 1$

Nach einer Stunde beträgt die Arzneimittelkonzentration unabhängig von k $1\ mg/l$.

e) *Nachweis einer Stammfunktion:*

$F_k(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot (kx + 1) \cdot e^{-k \cdot x}$

$u = (kx + 1) \qquad u' = k$

$v = e^{-k \cdot x} \qquad v' = -ke^{-k \cdot x}$

$F_k{}'(x) = -\frac{e^k}{k^2} \cdot \left(k \cdot e^{-k \cdot x} + (kx + 1) \cdot ke^{-k \cdot x}\right) \quad | \quad k \cdot e^{-k \cdot x}$ ausklammern

$= -\frac{ke^{-k \cdot x} \cdot e^k}{k^2 v} \cdot (1 + kx + 1)$

$= \frac{e^{-k \cdot x} \cdot e^k}{k} \cdot (-1 + kx + 1)$

$= \frac{e^{-k \cdot x + k}}{k} \cdot kx = x \cdot e^{-kx + k}$ ***q.e.d.***

f) *Mittlere Wirkstoffkonzentration :*

$m(2) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 f_2(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot [F_2(x)]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(F_2(2) - F_2(0)\right)$

$m(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4}(-(2 \cdot 2 + 1) \cdot e^{-4} + (2 \cdot 0 + 1) \cdot e^0)$

$m(2) = \frac{e^2}{8}(-5e^{-4} + 1) = -\frac{e^2}{8} \cdot (5e^{-4} - 1) \approx 0{,}829$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration $m(2)$ beträgt etwa $0{,}829\ mg/l$.