Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 10

Aufgabe M10A1

a) Im Gezeitenkalender für Cuxhaven-Steubenhöft findet man für einen bestimmten Zeitpunkt (Zeitpunkt: $t = 0$) die Angabe $3{,}40\,m$ *Hochwasser* und $6\,h\,18\,min = 6{,}3\,h$ später die Angabe $0{,}70\,m$ *Niedrigwasser.* Bestimmen Sie eine geeignete Sinusfunktion, mit deren Hilfe man den Vorgang modellieren kann.

b) Der Zeitpunkt des nächsten Hochwassers ist mit $12\,h\,6\,min = 12{,}1\,h$ angegeben. Welche Sinusfunktion ergibt sich, wenn man nur die beiden Informationen bzgl. des Hochwassers und den Wasserstand des Niedrigwassers berücksichtigt?

c) Betrachten Sie den Graphen der Sinusfunktion mit $y = sin(x)$. In den „ersten Bogen" des Graphen werde ein Rechteck maximaler Größe eingezeichnet; dabei liegen zwei Eckpunkte des Rechtecks auf der x-Achse und die anderen beiden auf dem Graphen der Sinusfunktion.

c1) Begründen Sie, warum der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks beschrieben werden kann durch

$$A(x) = (\pi - 2x) \cdot sin(x) \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

c2) Skizzieren Sie den Graphen von $A(x)$ und bestätigen Sie mithilfe der 1. Ableitung von $A(x)$ dass für $x = 0{,}71$ der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist.

c3) Berechnen Sie den Anteil der Fläche des maximalen Rechtecks an der Fläche des ersten Bogens in Prozent.

c4) Betrachten Sie jetzt allgemein eine Funktionsschar von Sinusfunktionen mit $y = sin(k \cdot x);\ k \in \mathbb{N}$.
Auch hier soll analog zu oben ein Rechteck in den "ersten Bogen" des betreffenden Sinusgraphen eingezeichnet werden.
Geben Sie den Term an, mit dem der Flächeninhalt dieses Rechtecks berechnet werden kann.
Begründen Sie, dass auch für jedes beliebige k der Anteil des Flächeninhalts des maximalen Rechtecks am Flächeninhalt des Bogens genauso groß ist wie in Teilaufgabe c3).

Lösung M10A1

Lösungslogik

a) *Geeignete Sinusfunktion:*
Ausgehend von der allgemeinen Form einer Sinusfunktion
$$f(x) = asin\big(b(x-c)\big) + d$$
bestimmen wir an Hand der Aufgabenstellung die Parameter a, b und c.

b) *Sinusfunktion nur unter Berücksichtigung der beiden Hochpunkte und des Wertes für Niedrigwasser:*
Aus den Berechnungen nach a) ergibt sich über die beiden Hochpunkte lediglich eine andere Periode.

c1) *Flächenformel für eingeschriebenes Rechteck im ersten Bogen:*
Aus der Flächenformel für Rechtecke ergibt sich $A = l \cdot b$ (Länge mal Breite).

c2) *Skizze und Nachweis maximale Fläche:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c3) Anteil der Fläche des maximalen Rechtecks an der Fläche des ersten Bogens in Prozent
Wir berechnen die Fläche unter dem ersten Bogen über das Integral von $f(x)$ im Intervall $I = [0; \pi]$ sowie $A(0{,}71)$ und stellen die beiden Ergebnisse ins Verhältnis.

c4) *Flächeninhalt des Rechtecks gemäß c1) bei einer Funktionsschar:*
Wir bestimmen die Nebenbedingungen l und b anhand der vorgegebenen Funktionsschar und stellen daraus die Hauptbedingung auf.
Nachweis gleicher Flächeninhalt wie c3):
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Geeignete Sinusfunktion:*

$f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big) + d$

$a = \frac{y_{HP}-y_{TP}}{2}$; $d = \frac{y_{HP}+y_{TP}}{2}$

$y_{HP} = 3{,}4$ | Hochwasser

$y_{TP} = 0{,}7$ | Niedrigwasser

$a = \frac{2{,}7}{2} = 1{,}35;\quad d = \frac{4{,}1}{2} = 2{,}05$

$b = \frac{2\pi}{p}$

p aus Aufgabenstellung:

Der Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt bei einer Sinuskurve entspricht $\frac{p}{2}$.

$\frac{p}{2} = 6{,}3;\quad p = 12{,}6$

$b = \frac{2\pi}{12{,}6} \approx 0{,}499\pi$

Wegen $y_{HP} = 3{,}4$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Sinuskurve um $\frac{p}{4}$ nach links verschoben.

$c = -\frac{p}{4} = -\frac{12{,}6}{4} = -3{,}15$

$f(x) = 1{,}35\sin\big(0{,}499\pi(x+3{,}15)\big) + 2{,}05$

b) *Sinusfunktion nur unter Berücksichtigung der beiden Hochpunkte und des Wertes für Niedrigwasser:*

a und d wie Teilaufgabe a).

p aus Aufgabenstellung:

Der Abstand zwischen zwei Hochpunkten bei einer Sinuskurve entspricht p.

$p = 12{,}1$

$b = \frac{2\pi}{12{,}1} \approx 0{,}519\pi$

Wegen $y_{HP} = 3{,}4$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Sinuskurve um $\frac{p}{4}$ nach links verschoben.

$c = -\frac{p}{4} = -\frac{12{,}1}{4} = -3{,}025$

$f(x) = 1{,}35\sin\big(0{,}519\pi(x+3{,}025)\big) + 2{,}05$

c1) *Flächenformel für eingeschriebenes Rechteck im ersten Bogen:*

Hauptbedingung:

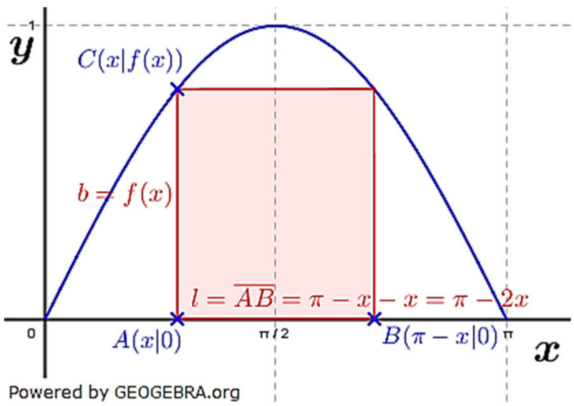
$A_{Rechteck} = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

$l = (\pi - 2x);\quad b = f(x) = \sin(x)$

NB → HB:

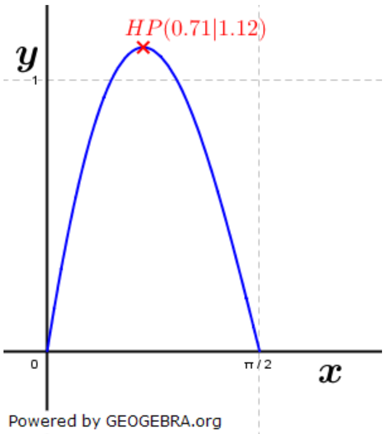
$A(x) = (\pi - 2x) \cdot \sin(x)$



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 10

c2) *Skizze und Nachweis maximale Fläche:*

Skizze des Graphen von $A(x)$:



$A(x) = (\pi - 2x) \cdot sin(x)$

$A'(x) = -2sin(x) + (\pi - 2x) \cdot \cos(x)$

$-2sin(x) + (\pi - 2x) \cdot \cos(x) = 0;\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$x \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}71$

c3) *Anteil der Fläche des maximalen Rechtecks an der Fläche des ersten Bogens in Prozent.*

$A(0{,}71) \overset{\text{WTR}}{\approx} 1{,}122$

$A_{Bogen} = \int_0^{\pi} sin(x)\,dx = [-cos(x)]_0^{\pi} = -cos(\pi) + cos(0)$

$A_{Bogen} = 2$

$\frac{A(0{,}71)}{A_{Bogen}} = \frac{1{,}122}{2} = 0{,}561 = 56{,}1\ \%$

Nach einer Stunde beträgt die Arzneimittelkonzentration unabhängig von k $1\ mg/l$.

c4) *Flächeninhalt des Rechtecks gemäß c1) bei einer Funktionsschar:*

Hauptbedingung:

$A_{Rechteck} = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

Wegen der Funktionsgleichung $y = sin(k \cdot x)$ gilt ein anderes p:

$p = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{k}$

$l = \left(\frac{p}{2} - 2x\right) = \left(\frac{\pi}{k} - 2x\right);\ \ b = sin(kx)$

NB → HB:

$A^*(x) = (\frac{\pi}{k} - 2x) \cdot sin(kx)$

Nachweis gleicher Flächeninhalt wie c3):

Die Flächenfunktion $A^*(x)$ hat wegen des Gleichungsanteils $sin(kx)$ nach wie vor die Periode $p = \frac{2\pi}{k}$. Der Faktor k stellt (wegen $k \in \mathbb{N}$) eine Stauchung der Sinusfunktion in x-Richtung dar. Dies staucht die Länge l des Rechtecks im selben Verhältnis. Der Stauchungsfaktor ist $\frac{1}{k}$. Somit wird sowohl die Fläche des Rechtecks als auch die Fläche unter dem ersten Bogen mit diesem Verhältnis gestaucht, sodass das Verhältnis zwischen maximaler Rechteckfläche und Fläche unter dem ersten Bogen konstant bleibt mit etwa 56,1 %.