Lösung M10A1

Lösungslogik

a) *Geeignete Sinusfunktion:*
Ausgehend von der allgemeinen Form einer Sinusfunktion
$$f(x) = asin\big(b(x-c)\big) + d$$
bestimmen wir an Hand der Aufgabenstellung die Parameter a, b und c.

b) *Sinusfunktion nur unter Berücksichtigung der beiden Hochpunkte und des Wertes für Niedrigwasser:*
Aus den Berechnungen nach a) ergibt sich über die beiden Hochpunkte lediglich eine andere Periode.

c1) *Flächenformel für eingeschriebenes Rechteck im ersten Bogen:*
Aus der Flächenformel für Rechtecke ergibt sich $A = l \cdot b$ (Länge mal Breite).

c2) *Skizze und Nachweis maximale Fläche:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c3) Anteil der Fläche des maximalen Rechtecks an der Fläche des ersten Bogens in Prozent
Wir berechnen die Fläche unter dem ersten Bogen über das Integral von $f(x)$ im Intervall $I = [0; \pi]$ sowie $A(0{,}71)$ und stellen die beiden Ergebnisse ins Verhältnis.

c4) *Flächeninhalt des Rechtecks gemäß c1) bei einer Funktionsschar:*
Wir bestimmen die Nebenbedingungen l und b anhand der vorgegebenen Funktionsschar und stellen daraus die Hauptbedingung auf.
Nachweis gleicher Flächeninhalt wie c3):
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Geeignete Sinusfunktion:*

$f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big) + d$

$a = \frac{y_{HP}-y_{TP}}{2}$; $d = \frac{y_{HP}+y_{TP}}{2}$

$y_{HP} = 3{,}4$ | Hochwasser

$y_{TP} = 0{,}7$ | Niedrigwasser

$a = \frac{2{,}7}{2} = 1{,}35$; $d = \frac{4{,}1}{2} = 2{,}05$

$b = \frac{2\pi}{p}$

p aus Aufgabenstellung:

Der Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt bei einer Sinuskurve entspricht $\frac{p}{2}$.

$\frac{p}{2} = 6{,}3$; $p = 12{,}6$

$b = \frac{2\pi}{12{,}6} \approx 0{,}499\pi$

Wegen $y_{HP} = 3{,}4$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Sinuskurve um $\frac{p}{4}$ nach links verschoben.

$c = -\frac{p}{4} = -\frac{12{,}6}{4} = -3{,}15$

$f(x) = 1{,}35\sin\big(0{,}499\pi(x+3{,}15)\big) + 2{,}05$

b) *Sinusfunktion nur unter Berücksichtigung der beiden Hochpunkte und des Wertes für Niedrigwasser:*

a und d wie Teilaufgabe a).

p aus Aufgabenstellung:

Der Abstand zwischen zwei Hochpunkten bei einer Sinuskurve entspricht p.

$p = 12{,}1$

$b = \frac{2\pi}{12{,}1} \approx 0{,}519\pi$

Wegen $y_{HP} = 3{,}4$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Sinuskurve um $\frac{p}{4}$ nach links verschoben.

$c = -\frac{p}{4} = -\frac{12{,}1}{4} = -3{,}025$

$f(x) = 1{,}35\sin\big(0{,}519\pi(x+3{,}025)\big) + 2{,}05$

c1) *Flächenformel für eingeschriebenes Rechteck im ersten Bogen:*

Hauptbedingung:

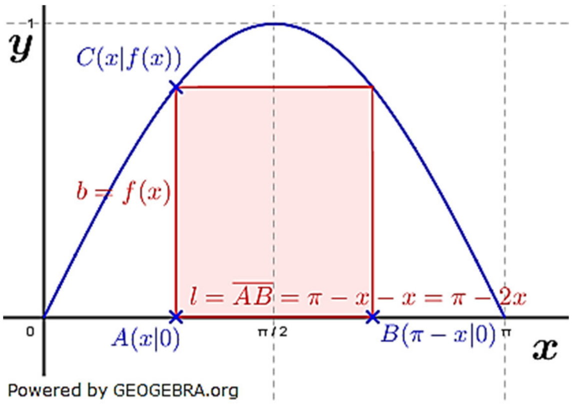
$A_{Rechteck} = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

$l = (\pi - 2x)$; $b = f(x) = \sin(x)$

NB → HB:

$A(x) = (\pi - 2x) \cdot \sin(x)$



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 10

c2) *Skizze und Nachweis maximale Fläche:*

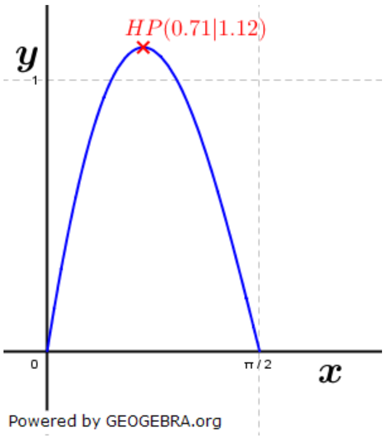
Skizze des Graphen von $A(x)$:

$A(x) = (\pi - 2x) \cdot sin(x)$

$A'(x) = -2sin(x) + (\pi - 2x) \cdot \cos(x)$

$-2sin(x) + (\pi - 2x) \cdot \cos(x) = 0;\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$x \overset{WTR}{\approx} 0{,}71$



c3) *Anteil der Fläche des maximalen Rechtecks an der Fläche des ersten Bogens in Prozent.*

$A(0{,}71) \overset{WTR}{\approx} 1{,}122$

$A_{Bogen} = \int_0^{\pi} sin(x)\,dx = [-cos(x)]_0^{\pi} = -cos(\pi) + cos(0)$

$A_{Bogen} = 2$

$\frac{A(0{,}71)}{A_{Bogen}} = \frac{1{,}122}{2} = 0{,}561 = 56{,}1\,\%$

Nach einer Stunde beträgt die Arzneimittelkonzentration unabhängig von k $1\ mg/l$.

c4) *Flächeninhalt des Rechtecks gemäß c1) bei einer Funktionsschar:*

Hauptbedingung:

$A_{Rechteck} = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

Wegen der Funktionsgleichung $y = sin(k \cdot x)$ gilt ein anderes p:

$p = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{k}$

$l = \left(\frac{p}{2} - 2x\right) = \left(\frac{\pi}{k} - 2x\right);\ \ b = sin(kx)$

NB → HB:

$A^*(x) = (\frac{\pi}{k} - 2x) \cdot sin(kx)$

Nachweis gleicher Flächeninhalt wie c3):

Die Flächenfunktion $A^*(x)$ hat wegen des Gleichungsanteils $sin(kx)$ nach wie vor die Periode $p = \frac{2\pi}{k}$. Der Faktor k stellt (wegen $k \in \mathbb{N}$) eine Stauchung der Sinusfunktion in x-Richtung dar. Dies staucht die Länge l des Rechtecks im selben Verhältnis. Der Stauchungsfaktor ist $\frac{1}{k}$. Somit wird sowohl die Fläche des Rechtecks als auch die Fläche unter dem ersten Bogen mit diesem Verhältnis gestaucht, sodass das Verhältnis zwischen maximaler Rechteckfläche und Fläche unter dem ersten Bogen konstant bleibt mit etwa $56{,}1\,\%$.