

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 11



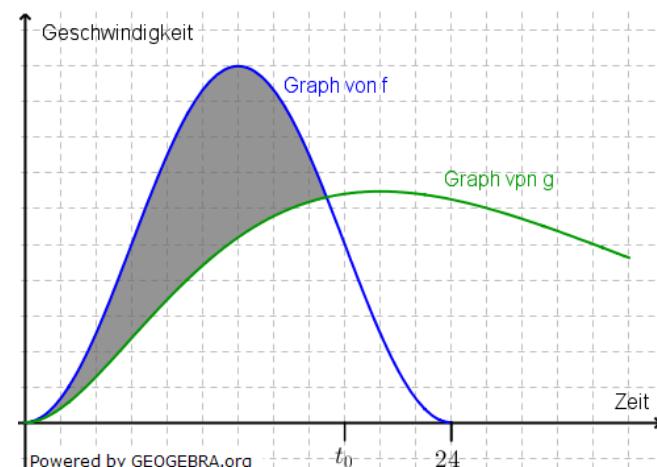
Aufgabe M11A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 2e^{-x}$. Ihr Graph ist K .

- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.
Untersuchen Sie f rechnerisch auf Monotonie.
Skizzieren Sie K .
Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem K die x -Achse schneidet.
- Die y -Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen eine nach rechts offene Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.
- Der Graph K^* entsteht durch Spiegelung von K an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der zu K^* gehörenden Funktion f^* .
- Eine Parabel zweiter Ordnung berührt den Graphen K im Punkt $S(0|4)$ und hat ihren Scheitel auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel.

Aufgabe M11A2

Die Funktionen f und g beschreiben die Geschwindigkeiten zweier Fahrzeuge F und G in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden, $f(t)$ und $g(t)$ in Meter pro Sekunde). Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt. Die beiden Fahrzeuge starten zum Zeitpunkt $t = 0$ nebeneinander und fahren in dieselbe Richtung.



- Beschreiben Sie die Bewegung von Fahrzeug F in den ersten 24 Sekunden nach dem Start. Die Stelle t_0 ist eine Wendestelle des Graphen von f . Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.
- Deuten Sie den Inhalt der markierten Fläche im Sachzusammenhang.
Gegeben ist die Gleichung $\int_0^x g(t)dt = \int_0^{24} f(t)dt$.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 11

Lösung M11A1

Lösungslogik

- a) *Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen:*

Wir bilden $f(x) = 0$ für die Nullstellen und $f(0)$ für den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Gleichung der Asymptote von K an:

Wir untersuchen das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$.

Untersuchung von f auf Monotonie:

Wir untersuchen f auf das Vorhandensein von Extrempunkten. Sind keine vorhanden, so genügt die Feststellung von $f'(x_0)$ für x_0 an beliebiger Stelle.

Weite des Winkels, unter dem K die x-Achse schneidet:

Wir berechnen die Steigung f' in der Nullstelle und ermitteln über $\arctan(f')$ den Schnittwinkel.

- b) *Flächeninhalt, den die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen:*

Wir ermitteln das Integral zwischen oberer Kurve $y = 6$ und unterer Kurve $f(x)$ im Intervall von $0 \leq x \leq z$ und bestimmen dann den Limes für $z \rightarrow \infty$.

- c) *Funktionsgleichung eines gespiegelten Graphen K^* :*

Zunächst verschieben wir K um eine Stelle nach unten, spiegeln diesen verschobenen Graphen an der x-Achse, verschieben den gespiegelten Graphen wieder um eine Stelle nach oben und erhalten dadurch die Funktionsgleichung für K^* .

- d) *Gleichung einer Parabel zweiter Ordnung, die den Graphen K im Punkt S(0|4) berührt und ...:*

Nach Aufgabenstellung liegt der Scheitel der Parabel bei $S_p(x_s|5)$. Wir stellen die Parabelgleichung $p(x)$ über die Scheitelpunktgleichung auf. Wegen Berührpunkt in $S(0|4)$ muss außerdem $p'(0) = f'(0)$ sein.

Klausuraufschrieb

- a) $f(x) = 6 - 2e^{-x}$

Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen:

Nullstellen:

$$6 - 2e^{-x} = 0$$

$$2e^{-x} = 6$$

$$e^{-x} = 3 \quad | \quad \ln$$

$$-x = \ln(3)$$

$$x = -\ln(3)$$

$$N_1(-\ln(3)|0)$$

Schnittpunkt y-Achse:

$$f(0) = 6 - 2e^0 = 6 - 2 = 4$$

$$S_y(0|4)$$

Gleichung der Asymptote von K an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty}(6 - 2e^{-x}) = 6$$

K hat die Asymptote $y = 6$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 11

Untersuchung von f auf Monotonie:

$$f'(x) = 2e^{-x}$$

Extremstellen

$$2e^{-x} = 0$$

$$\mathbb{L} = \{\}$$

f hat keine Extremstellen.

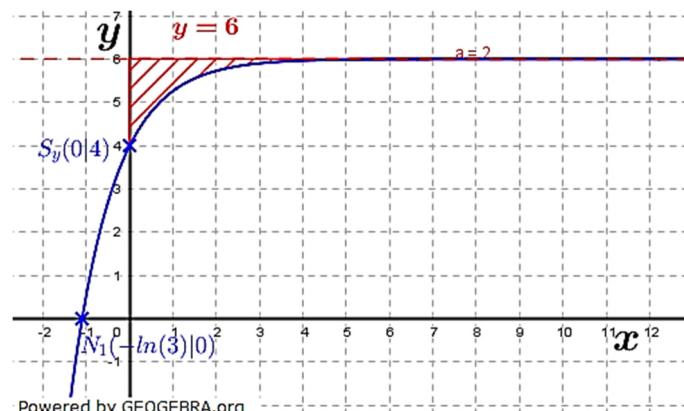
Steigung an beliebiger Stelle:

$$f'(0) = 2e^0 = 2 > 0$$

f ist in ganz \mathbb{R} streng monoton steigend.

Skizze von :

Siehe Grafik rechts.



Berechnung des Winkels, unter dem K die x -Achse schneidet:

Nullstelle bei $N_1(-\ln(3)|0)$

Steigung in der Nullstelle:

$$f'(-\ln(3)) = 2e^{\ln(3)} = 6$$

$$\alpha = \arctan(6) = 80,54^\circ$$

Der Schnittwinkel von K mit der x -Achse beträgt $80,54^\circ$.

- b) Flächeninhalt, den die y -Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 6$ und K begrenzen:

$$\int_0^c (6 - f(x)) dx = \int_0^c (6 - (6 - 2e^{-x})) dx = \int_0^c 2e^{-x} dx$$

$$\int_0^c 2e^{-x} dx = [-2e^{-x}]_0^c = -2e^{-c} + 2$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (-2e^{-c}) = 0$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\int_0^c (6 - f(x)) dx) = 2$$

Der Inhalt der nach rechts offenen Fläche beträgt 2 FE.

- c) Funktionsgleichung eines gespiegelten Graphen K^* :

K um eine Stelle nach unten:

$$g(x) = 6 - 2e^{-x} - 1 = 5 - 2e^{-x}$$

Spiegelung an der x -Achse:

$$-g(x) = -5 + 2e^{-x}$$

$-g(x)$ um eine Stelle nach oben verschieben

$$f^*(x) = -4 + 2e^{-x}$$

Die Funktionsgleichung von K^* lautet $f^*(x) = -4 + 2e^{-x}$.

- d) Gleichung einer Parabel zweiter Ordnung:

Der Scheitel der Parabel liegt bei $S_p(x_s|5)$

$$p(x) = a(x - x_p)^2 + 5 \quad | \quad \text{Scheitelpunktgleichung der Parabel}$$

$$p(x) = ax^2 - 2abx_p + ax_p^2 + 5$$

$$ab^2 + 5 = 4$$

$$f'(0) = p'(0)$$

$$p'(x) = 2ax - 2ax_p$$

$$f'(0) = 2$$

$$(I) \quad -2ax_p = 2$$

$$(II) \quad ax_p^2 + 5 = 4$$

y -Achsenabschnitt

Wegen Berührpunkt $S(0|4)$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 11

$$(I) \quad ax_p = -1$$

$$x_p = -\frac{1}{a}$$

$$(II) \quad ax_p^2 = -1$$

$$x_p \rightarrow (II)$$

$$a \left(-\frac{1}{a} \right)^2 = -1$$

$$\frac{1}{a} = -1$$

$$a = -1$$

$$a \rightarrow (I)$$

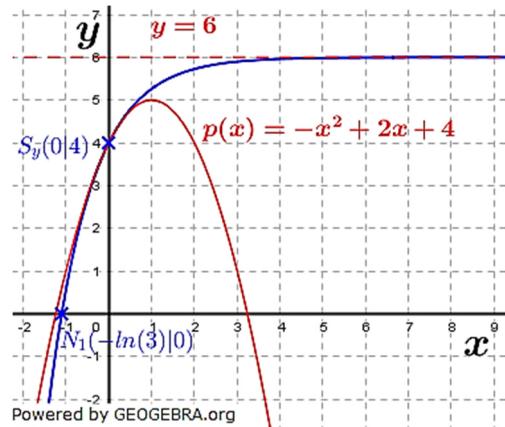
$$x_p = 1$$

$$p(x) = -(x - 1)^2 + 5$$

$$p(x) = -x^2 + 2x - 1 + 5$$

$$p(x) = -x^2 + 2x + 4$$

Das Schaubild der Parabel p mit der Funktionsgleichung $p(x) = -x^2 + 2x + 4$ erfüllt die genannten Bedingungen.



Lösung M11A2

Klausuraufschrieb

- a) *Beschreibung der Bewegung:*

Das Fahrzeug F beschleunigt zunächst und bremst dann wieder ab, um nach 24 Sekunden zum Stillstand zu kommen.

Bedeutung der Wendestelle:

Die Stelle t_0 ist der Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug F am stärksten bremst.

- b) *Deutung des Flächeninhalts:*

Der Inhalt der Fläche entspricht dem maximalen Vorsprung, den das Fahrzeug F während der Fahrt gegenüber dem Fahrzeug G hat.

Frage im Sachzusammenhang:

Zu welchem Zeitpunkt hat das Fahrzeug G denselben Weg zurückgelegt, den das Fahrzeug F innerhalb der ersten 24 Sekunden zurücklegt?