Aufgabe M12A1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an. Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form $I)$ noch die Form $II)$ hat:

$I) \quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$

$II) \quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \qquad b \in \mathbb{R}$

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion

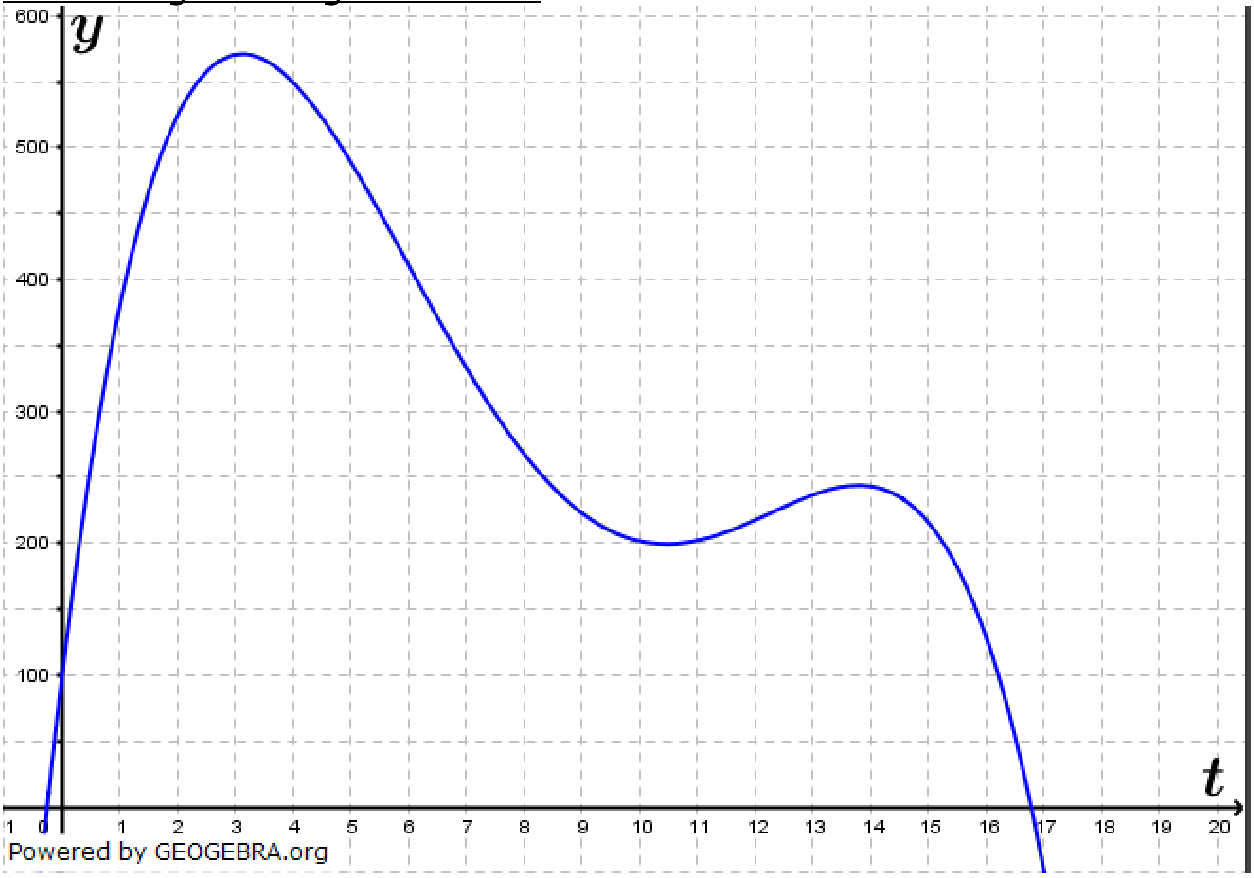
$$g \text{ mit } g(t) = 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26t^3 + 180t^2)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Abbildung zu Aufgabe M12A1



Aufgabe M12A2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet. Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt.

Lösung M12A1

Lösungslogik

a) *Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
Ablesen von $f(5)$ aus der Grafik.

Zeitraum in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt:
Wir zeichnen eine Parallele zur x-Achse $y = 350$ in die Grafik ein und lesen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Graphen von f ab.

Momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn:

Wir zeichnen ein Tangente an im Punkt $P(2|f(2))$, zeichnen das Steigungsdreieck und bestimmen die Steigung.

Begründen für die Funktionsgleichungen I) und II):
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Grafisches Verfahren zur Bestimmung eines Zeitpunktes:*
Wir zeichnen eine Tangente im Punkt $Q(15|f(15))$ und lesen die Nullstelle dieser Tangente ab.

Interpretieren einer Gleichung und Lösung derselben:
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist:*
Bildung der ersten Ableitung $g'(t)$ von g und Bestimmung des Hochpunktes. Danach Prüfung, ob eventuell ein Randmaximum vorhanden ist.

Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt:
$g(t)$ ist ja die Änderungsrate. Das Wasservolumen nimmt ab, wenn die Änderungsrate kleiner als Null ist. Wir berechnen die Nullstellen von g.

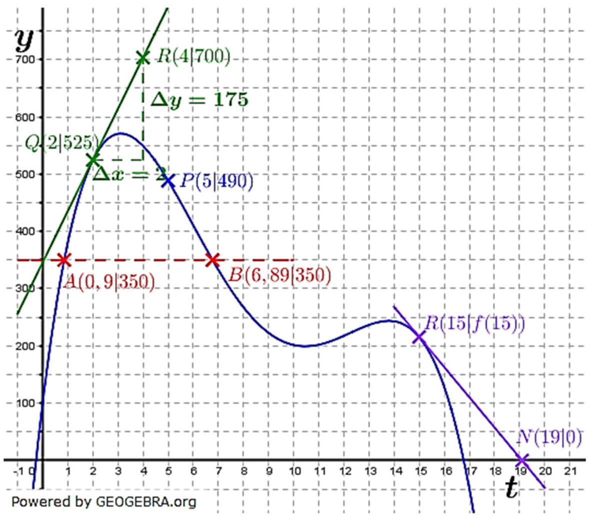
d) *Bestimmung des Wasservolumens zu Beobachtungsbeginn.*
Die Fläche unter g im Intervall $0 \leq t \leq 2$ bestimmt den Zufluss in den ersten beiden Stunden. Die Differenz zwischen $350\,m^3$ und diesem Zufluss ist das Wasservolumen zu Beginn der Beobachtung. Wegen der gegebenen Stammfunktion $G(t)$ kann sofort $350 - \big(G(2) - G(0)\big)$ gebildet werden.

Prüfung eines Zeitpunktes, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn:
Sollte es einen solchen Zeitpunkt u geben, so muss es einen Wasserabfluss geben, der genauso groß ist, wie ein vorheriger Zufluss. Dies bedeutet, dass die Flächenbilanz unter g im Intervall $0 \leq t \leq u$ Null sein muss. Wir prüfen, ob $\big(G(u) - G(0)\big) = 0$ eine Lösung hat.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 12

Klausuraufschrieb

a) *Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
$f(5) = 490\, m^3$
Zeitraum in dem das Volumen mindestens 350 *Kubikmeter beträgt:*
$350 \cap f$
$A(0{,}9|350)$; $B(6{,}9|350)$
Etwa im Zeitraum von $0{,}9$ *Stunden und* $6{,}9$ *Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt das Wasservolumen im Becken mindestens* $350\, m^3$.
Momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn:
Tangente in $Q(2|525)$ durch $R(4|700)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{175}{2} = 87{,}5$



Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $87{,}5 \frac{m^3}{h}$.
Begründen für die Funktionsgleichungen I) *und* II)*:*
Funktionsgleichung I) hat nur gerade Potenzen von t, ist damit achsensymmetrisch zur y-Achse. Die gegebene Grafik hat keine Symmetrie.
Funktionsgleichung II) ist ganzrationale Funktion dritten Grades und für $t \to \infty$ gilt $f(t) \to \infty$. Die gegebene Grafik hingegen verläuft nach $f(t) \to -\infty$.

b) *Grafisches Verfahren zur Bestimmung eines Zeitpunktes:*
Wir zeichnen eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(15|f(15))$ und bestimmen die Nullstelle N dieser Tangente.
Der t-Wert der Nullstelle entspricht dem Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem das Becken leer ist.

Interpretieren einer Gleichung und Lösung derselben:
$f(t+6) = f(t) - 350$ ist mathematische Formulierung für einen gesuchten Zeitraum von 6 Stunden, in dem die Wassermenge im Becken um $350\, m^3$ abnimmt.
Aus der Grafik abgelesen:
$f(4) = 550$; $f(10) = 200$;
$f(10) - f(4) = 550 - 200 = 350$
Etwa zwischen 4 *und* 10 *Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt die Wassermenge im Becken um* $350\, m^3$ *ab.*

c) *Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist:*
$g'(t) = 0{,}4 \cdot (6t^2 - 78t + 180)$
$g'(t) = 0$
$6t^2 - 78t + 180 = 0 \quad | \quad :6$
$t^2 - 13t + 30 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel
$t_{1,2} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 30} = 6{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 6{,}5 \pm 3{,}5$
$t_1 = 10$; $t_2 = 3$

$g''(t) = 0{,}4 \cdot (12t - 78)$
$g''(3) = 0{,}4 \cdot (12 \cdot 3 - 78) < 0$ => Hochpunkt
$g(3) = 0{,}4 \cdot (2 \cdot (3)^3 - 39 \cdot (3)^2 + 180 \cdot 3) = 97{,}2$
Prüfung auf Randmaximum:
$g(0) = 0; \quad g(15) = 270$
Die maximale momentane Änderungsrate liegt mit $270 \frac{m^3}{h}$ 15 *Stunden nach Beobachtungsbeginn vor.*

Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt:
$g(t) = 0$
$0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t) = 0$
$0{,}4t \cdot (2t^2 - 39t + 180) = 0$
$t_1 = 0$
$2t^2 - 39t + 180 = 0 \qquad | \quad :2$
$t^2 - 19{,}5t + 90 = 0$
$t_{2,3} = 9{,}75 \pm \sqrt{9{,}75^2 - 90} = 9{,}75 \pm 2{,}25$
$t_2 = 12; \quad t_3 = 7{,}5$
Wegen des Hochpunktes bei $t = 3$ nimmt das Volumen des Wassers zwischen $7{,}5$ und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) *Bestimmung des Wasservolumens zu Beobachtungsbeginn.*
Zufluss im Zeitraum von $0 \leq t \leq 2$:
$Z = \int_0^2 g(t)\,dt = [G(t)]_0^2 = G(2) - G(0)$
$Z = 0{,}2 \cdot (2^4 - 26 \cdot 2^3 + 180 \cdot 2^2) - 0{,}2 \cdot 0$
$Z = 105{,}6$
Mit $350\,m^3$ Volumen im Becken 2 Stunden nach Beobachtungsbeginnt ergibt sich der Anfangsbestand zu:
$A = 350 - Z = 350 - 105{,}6 = 244{,}4$
Anfangs befanden sich $244{,}4\,m^3$ *Wasser im Becken.*

Prüfung eines Zeitpunktes, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn:
Dies ist dann der Fall, wenn es einen Zeitpunkt u gibt, zudem das Volumen des zugeflossenen Wassers gleich ist dem Volumen des abgeflossenen Wassers, die Flächenbilanz unter dem Graphen von g also Null ist.
$\int_0^u g(t)\,dt = [G(t)]_0^u = G(u) - G(0) = 0$
$0{,}2 \cdot (u^4 - 26u^3 + 180u^2) - 0{,}2 \cdot 0 = 0$
$0{,}2u^2(u^2 - 26u + 180) = 0$
$u_{1,2} = 0$
$u^2 - 26u + 180 = 0$
$u_{3,4} = 13 \pm \sqrt{169 - 180} = 13 \pm \sqrt{-11} \;\Rightarrow\; \mathbb{L} = \{\}$
Es gibt keinen Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Lösung M12A2

Lösungslogik

Berechnung von u in Abhängigkeit von c:

Beim unverschobenen Sinus ist $x_0 = 0$ eine Nullstelle. Die erste positive Nullstelle nach $x_0 = 0$ liegt bei $x_1 = \frac{p}{2}$ mit p als Periode der trigonometrischen Funktion.

Inhalt eines Flächenstücks:

Wir bilden das Integral zwischen Graph von h_c und der x-Achse im Intervall $0 \leq x \leq u$.

Klausuraufschrieb

Berechnung von u in Abhängigkeit von c:

Nullstelle $x_0 = 0$ ist gegeben. Nächste positive Nullstelle liegt bei $x_1 = \frac{p}{2}$, somit ist $u = \frac{p}{2}$.

$p = \frac{2\pi}{c}$

$u = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2c} = \frac{\pi}{c}$

Inhalt eines Flächenstücks:

$A = \int_0^u c \cdot \sin(cx) = c \cdot \left[-\frac{\cos(cx)}{c}\right]_0^u = c \cdot (-\frac{1}{c}\cos(cu) - \left(-\frac{\cos(0)}{c}\right)$

$A = c \cdot \left(-\frac{1}{c}\cos\left(c \cdot \frac{\pi}{c}\right) + \frac{1}{c}\right) = c \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\right) = c \cdot \frac{2}{c} = 2$

Inhalt eines Flächenstücks des Flächenstücks ist unabhängig von c $2\,FE$ groß.