Aufgabe M12A1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an. Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form $I)$ noch die Form $II)$ hat:

$I) \quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$

$II) \quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \qquad b \in \mathbb{R}$

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion

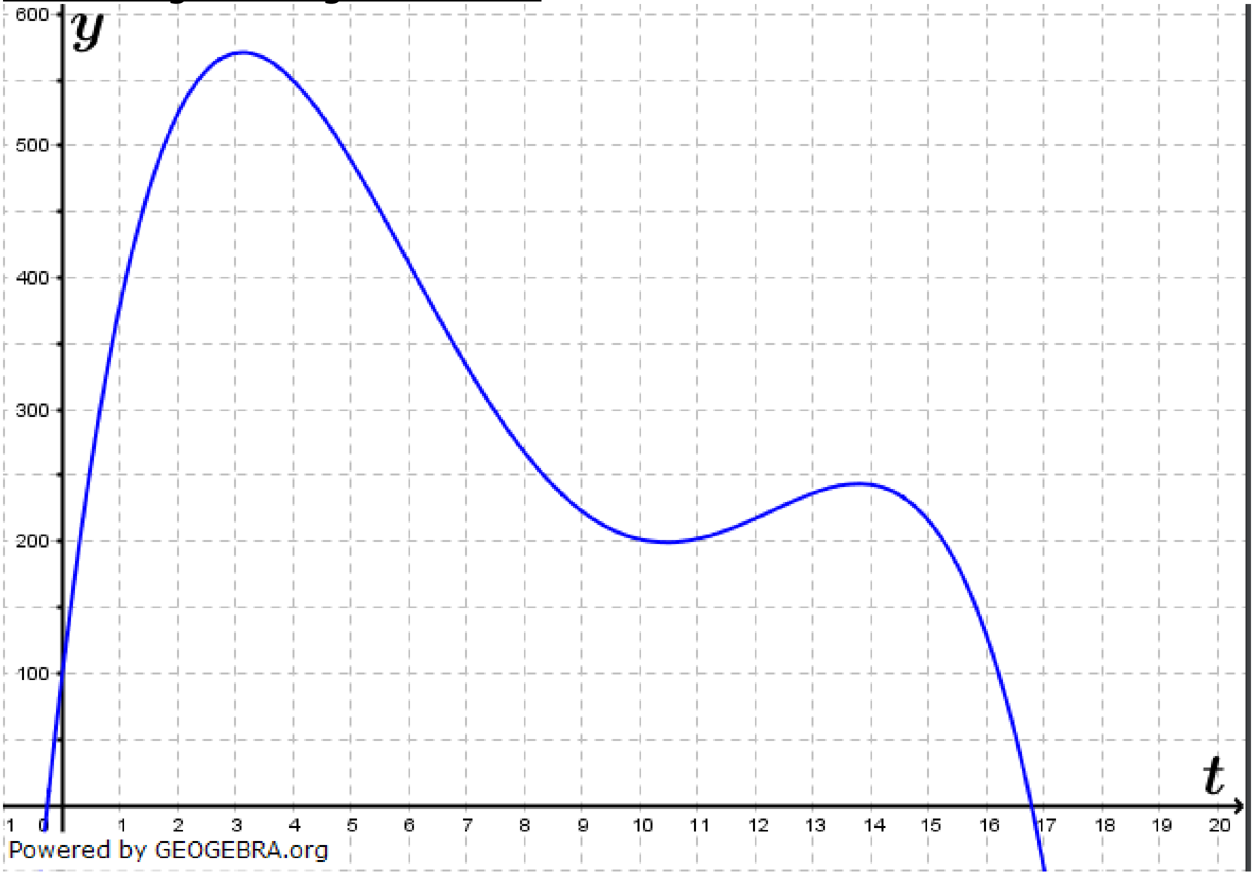
$$g \text{ mit } g(t) = 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26t^3 + 180t^2)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Abbildung zu Aufgabe M12A1



Aufgabe M12A2

Für jedes $c > 0$ ist eine Funktion h_c mit $h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ gegeben.

Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet. Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt.