Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 12

Lösung M12A1

Lösungslogik

a) *Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
Ablesen von $f(5)$ aus der Grafik.

Zeitraum in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt:
Wir zeichnen eine Parallele zur x-Achse $y = 350$ in die Grafik ein und lesen die Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Graphen von f ab.

Momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn:

Wir zeichnen ein Tangente an im Punkt $P(2|f(2))$, zeichnen das Steigungsdreieck und bestimmen die Steigung.

Begründen für die Funktionsgleichungen I) und II):
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Grafisches Verfahren zur Bestimmung eines Zeitpunktes:*
Wir zeichnen eine Tangente im Punkt $Q(15|f(15))$ und lesen die Nullstelle dieser Tangente ab.

Interpretieren einer Gleichung und Lösung derselben:
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist:*
Bildung der ersten Ableitung $g'(t)$ von g und Bestimmung des Hochpunktes. Danach Prüfung, ob eventuell ein Randmaximum vorhanden ist.

Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt:
$g(t)$ ist ja die Änderungsrate. Das Wasservolumen nimmt ab, wenn die Änderungsrate kleiner als Null ist. Wir berechnen die Nullstellen von g.

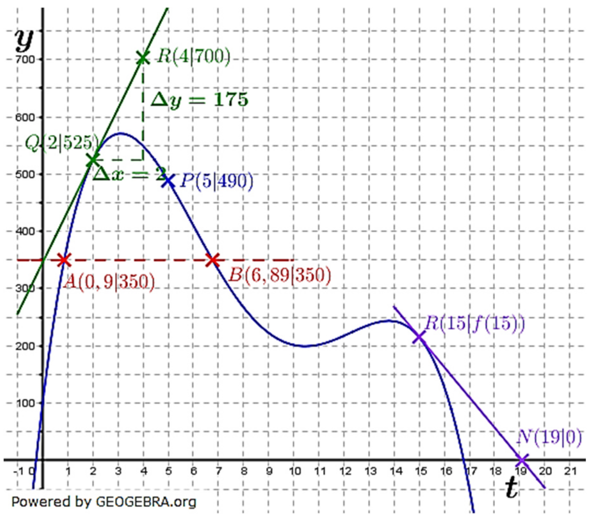
d) *Bestimmung des Wasservolumens zu Beobachtungsbeginn.*
Die Fläche unter g im Intervall $0 \leq t \leq 2$ bestimmt den Zufluss in den ersten beiden Stunden. Die Differenz zwischen $350\,m^3$ und diesem Zufluss ist das Wasservolumen zu Beginn der Beobachtung. Wegen der gegebenen Stammfunktion $G(t)$ kann sofort $350 - \big(G(2) - G(0)\big)$ gebildet werden.

Prüfung eines Zeitpunktes, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn:
Sollte es einen solchen Zeitpunkt u geben, so muss es einen Wasserabfluss geben, der genauso groß ist, wie ein vorheriger Zufluss. Dies bedeutet, dass die Flächenbilanz unter g im Intervall $0 \leq t \leq u$ Null sein muss. Wir prüfen, ob $\big(G(u) - G(0)\big) = 0$ eine Lösung hat.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 12

Klausuraufschrieb

a) *Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn:*
$f(5) = 490\, m^3$
Zeitraum in dem das Volumen mindestens 350 *Kubikmeter beträgt:*
$350 \cap f$
$A(0{,}9|350)$; $B(6{,}9|350)$
Etwa im Zeitraum von $0{,}9$ *Stunden und* $6{,}9$ *Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt das Wasservolumen im Becken mindestens* $350\, m^3$*.*



Momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn:
Tangente in $Q(2|525)$ durch $R(4|700)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{175}{2} = 87{,}5$
Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $87{,}5 \frac{m^3}{h}$*.*
Begründen für die Funktionsgleichungen I*) und* II*):*
Funktionsgleichung $I)$ hat nur gerade Potenzen von t, ist damit achsensymmetrisch zur y-Achse. Die gegebene Grafik hat keine Symmetrie.
Funktionsgleichung $II)$ ist ganzrationale Funktion dritten Grades und für $t \to \infty$ gilt $f(t) \to \infty$. Die gegebene Grafik hingegen verläuft nach $f(t) \to -\infty$.

b) *Grafisches Verfahren zur Bestimmung eines Zeitpunktes:*
Wir zeichnen eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(15|f(15))$ und bestimmen die Nullstelle N dieser Tangente.
Der t-Wert der Nullstelle entspricht dem Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem das Becken leer ist.

Interpretieren einer Gleichung und Lösung derselben:
$f(t+6) = f(t) - 350$ ist mathematische Formulierung für einen gesuchten Zeitraum von 6 Stunden, in dem die Wassermenge im Becken um $350\, m^3$ abnimmt.
Aus der Grafik abgelesen:
$f(4) = 550$; $f(10) = 200$;
$f(10) - f(4) = 550 - 200 = 350$
Etwa zwischen 4 *und* 10 *Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt die Wassermenge im Becken um* $350\, m^3$ *ab.*

c) *Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist:*
$g'(t) = 0{,}4 \cdot (6t^2 - 78t + 180)$
$g'(t) = 0$
$6t^2 - 78t + 180 = 0 \quad | \quad :6$
$t^2 - 13t + 30 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel
$t_{1,2} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 30} = 6{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 6{,}5 \pm 3{,}5$
$t_1 = 10$; $t_2 = 3$

$g''(t) = 0{,}4 \cdot (12t - 78)$
$g''(3) = 0{,}4 \cdot (12 \cdot 3 - 78) < 0$ => Hochpunkt
$g(3) = 0{,}4 \cdot (2 \cdot (3)^3 - 39 \cdot (3)^2 + 180 \cdot 3) = 97{,}2$
Prüfung auf Randmaximum:
$g(0) = 0;\quad g(15) = 270$
Die maximale momentane Änderungsrate liegt mit $270\frac{m^3}{h}$ 15 *Stunden nach Beobachtungsbeginn vor.*

Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt:
$g(t) = 0$
$0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t) = 0$
$0{,}4t \cdot (2t^2 - 39t + 180) = 0$
$t_1 = 0$
$2t^2 - 39t + 180 = 0 \qquad | \quad :2$
$t^2 - 19{,}5t + 90 = 0$
$t_{2,3} = 9{,}75 \pm \sqrt{9{,}75^2 - 90} = 9{,}75 \pm 2{,}25$
$t_2 = 12;\quad t_3 = 7{,}5$
Wegen des Hochpunktes bei $t = 3$ nimmt das Volumen des Wassers zwischen $7{,}5$ und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

d) *Bestimmung des Wasservolumens zu Beobachtungsbeginn.*
Zufluss im Zeitraum von $0 \le t \le 2$:
$Z = \int_0^2 g(t)\,dt = [G(t)]_0^2 = G(2) - G(0)$
$Z = 0{,}2 \cdot (2^4 - 26 \cdot 2^3 + 180 \cdot 2^2) - 0{,}2 \cdot 0$
$Z = 105{,}6$
Mit $350\,m^3$ Volumen im Becken 2 Stunden nach Beobachtungsbeginnt ergibt sich der Anfangsbestand zu:
$A = 350 - Z = 350 - 105{,}6 = 244{,}4$
Anfangs befanden sich $244{,}4\,m^3$ *Wasser im Becken.*

Prüfung eines Zeitpunktes, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn:
Dies ist dann der Fall, wenn es einen Zeitpunkt u gibt, zudem das Volumen des zugeflossenen Wassers gleich ist dem Volumen des abgeflossenen Wassers, die Flächenbilanz unter dem Graphen von g also Null ist.
$\int_0^u g(t)\,dt = [G(t)]_0^u = G(u) - G(0) = 0$
$0{,}2 \cdot (u^4 - 26u^3 + 180u^2) - 0{,}2 \cdot 0 = 0$
$0{,}2u^2(u^2 - 26u + 180) = 0$
$u_{1,2} = 0$
$u^2 - 26u + 180 = 0$
$u_{3,4} = 13 \pm \sqrt{169 - 180} = 13 \pm \sqrt{-11}$ ➔ $\mathbb{L} = \{\}$
Es gibt keinen Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

Lösung M12A2

Lösungslogik

Berechnung von u in Abhängigkeit von c:
Beim unverschobenen Sinus ist $x_0 = 0$ eine Nullstelle. Die erste positive Nullstelle nach $x_0 = 0$ liegt bei $x_1 = \frac{p}{2}$ mit p als Periode der trigonometrischen Funktion.
Inhalt eines Flächenstücks:
Wir bilden das Integral zwischen Graph von h_c und der x-Achse im Intervall $0 \leq x \leq u$.

Klausuraufschrieb

Berechnung von u in Abhängigkeit von c:
Nullstelle $x_0 = 0$ ist gegeben. Nächste positive Nullstelle liegt bei $x_1 = \frac{p}{2}$, somit ist $u = \frac{p}{2}$.
$p = \frac{2\pi}{c}$
$u = \frac{p}{2} = \frac{2\pi}{2c} = \frac{\pi}{c}$

Inhalt eines Flächenstücks:
$A = \int_0^u c \cdot \sin(cx) = c \cdot \left[-\frac{\cos(cx)}{c}\right]_0^u = c \cdot (-\frac{1}{c}\cos(cu) - \left(-\frac{\cos(0)}{c}\right)$
$A = c \cdot \left(-\frac{1}{c}\cos\left(c \cdot \frac{\pi}{c}\right) + \frac{1}{c}\right) = c \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\right) = c \cdot \frac{2}{c} = 2$
Inhalt eines Flächenstücks des Flächenstücks ist unabhängig von c $2\,FE$ groß.