Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW
Dokument mit 6 Aufgaben

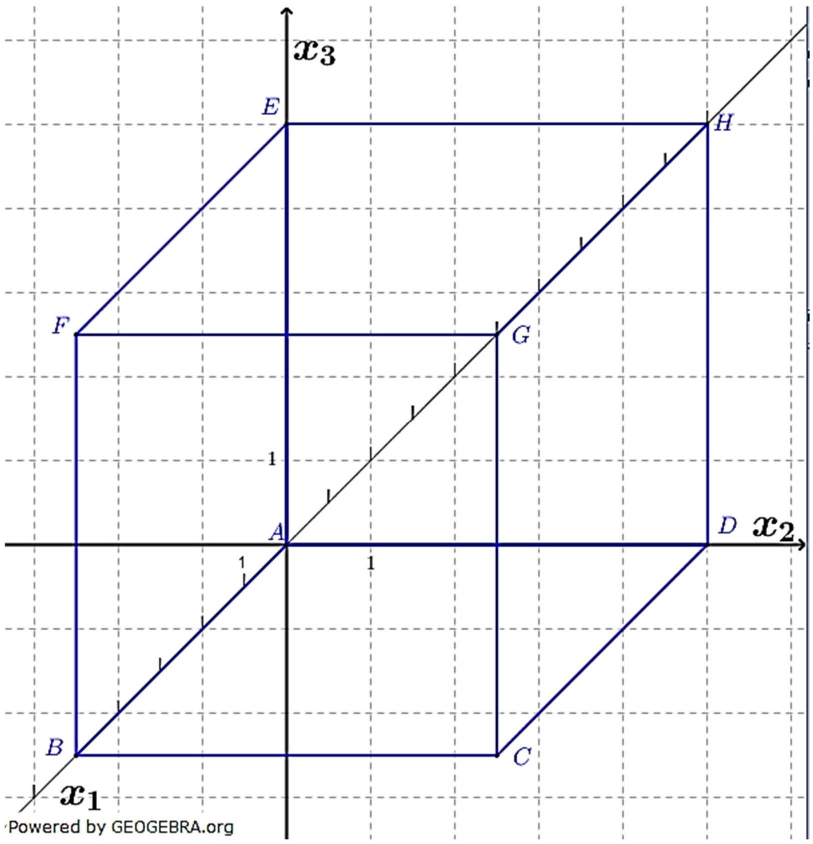
Aufgabe B1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $K(5|0|1)$, $L(2|5|0)$, $M(0|5|2)$ und $N(1|0|5)$.

a) Zeichnen Sie das Viereck $KLMN$ in die Abbildung ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck $KLMN$ ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von T mit der x_1-Achse an.
(Teilergebnis: $T\colon\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

b) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $KLMN$ liegt auf der Strecke FG.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

c) Betrachtet wird die Schar der Geraden
$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \text{ mit } a > 0$$
Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt.
Gegeben ist die Ebene $U\colon\ -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$.
Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und U zur betrachteten Schar gehört.



Aufgabe B2

Die Punkte $A(6|6|0)$, $B(2|8|0)$ und $O(0|0|0)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(4|6|10)$. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und $C(2|3|5)$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: $E\colon\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Dreieck ABC als Grundfläche und den Punkt S als Spitze hat.

c) In einem Koordinatensystem, bei dem die x_1x_2-Ebene den Erdboden beschreibt, stellt die Pyramide $ABOS$ ein Kunstwerk dar (Koordinatenangaben in m).
An der Stelle, die durch den Punkt $F(8|3|0)$ beschrieben wird, steht ein Mast senkrecht auf dem Erdboden. Auf den Mast treffendes Sonnenlicht lässt sich durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben.
Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt auf der Kante des Kunstwerks, die durch die Strecke OS beschrieben wird.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Höhe des Masts rechnerisch bestimmen kann.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

Lösung B1

Lösungslogik

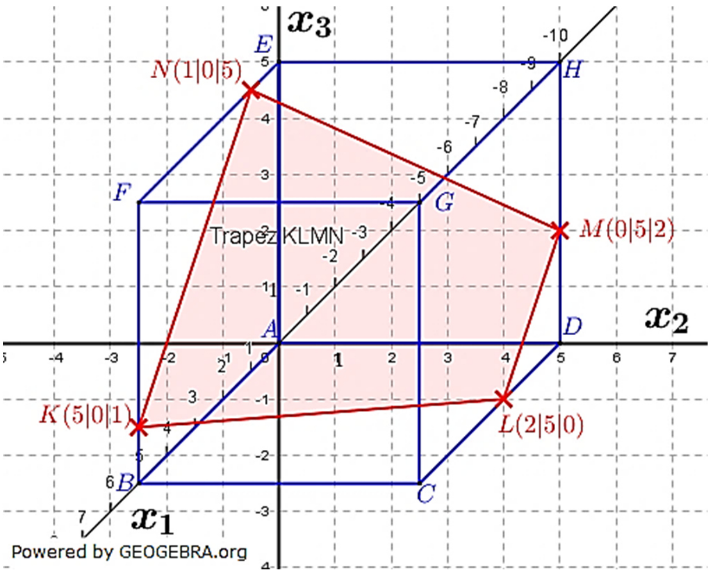
a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Nachweis eines gleichschenkligen Trapezes:
Zwei der Vektoren $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{KN}$ sind linear abhängig (parallel), die anderen beiden Vektoren müssen gleiche Länge haben.
Koordinatenform der Ebene T:
Wir bilden den Normalenvektor $\overrightarrow{n_T}$ von T über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{KL}$ und $\overrightarrow{KN}$ (andere Vektorkombinationen möglich) und stellen darüber die Koordinatenform von T auf.

b) *Spitze einer Pyramide:*
Wir prüfen, welcher Punkt S auf der Geraden durch F und G gibt, der von der Ebene T den Abstand $\frac{18}{\sqrt{66}}$ hat. Ergibt sich die Lage dieses Punktes zwischen den Punkten F und G, so ist die Prüfung erfolgreich, ansonsten nicht.

c) *Begründung einer Schargeraden:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Prüfung ob Schnittgerade von T und U Schargerade von g_a ist:
Zunächst prüfen wir, ab der Aufpunkt der Schargeraden sowohl in T als auch in U liegt. Ist dies der Fall, schneiden die beiden Ebenen T und U und bestimmen daraus die Schnittgerade. Dann prüfen wir, ob es ein a gibt, sodass der Richtungsvektor der Schnittgeraden ein Vielfaches des Richtungsvektors der Schargeraden ist.

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

Nachweis eines gleichschenkligen Trapezes:

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$

Die Strecken KN und LM sind die beiden parallelen Seiten des Trapezes.

$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$

Wegen $\overrightarrow{KN} \parallel \overrightarrow{LM} \wedge \left|\overrightarrow{KL}\right| = |MN|$ ist das Viereck $KLMN$ ein gleichschenkliges Trapez.

Koordinatenform der Ebene T:

$k \cdot \overrightarrow{n_T} = \overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \;==>\; \overrightarrow{n_T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$T\colon\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$

$5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 30$ | Punktprobe mit $K(5|0|1)$

$T\colon\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

b) *Spitze einer Pyramide:*

Gerade g durch F und G:

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OF} + r \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Pyramidenspitze hat die Koordinaten $S(5|5r|5)$

Abstand von S zur Ebene T:

$T\colon\ \frac{5x_1+4x_2+5x_3-30}{\sqrt{25+16+25}} = 0$ | HNF

$d(S;T) = \frac{|5\cdot5+4\cdot5r+5\cdot5-30|}{\sqrt{66}} = \frac{|20+20r|}{\sqrt{66}}$

$\frac{|20+20r|}{\sqrt{66}} = \frac{18}{\sqrt{66}}$

$|20 + 20r| = 18$

$20r_1 = -2$ | Fall 1

$r_1 = -0{,}1$

$20 + 20r_2 = -18$

$20r_2 = -38$ | Fall 2

$r_2 = -1{,}9$

Die Pyramidenspitze liegt zwischen den Punkten F und G für $0 < r < 1$. Dies ist hier nicht der Fall, sodass es keinen Punkt S auf der Strecke FG gibt, dessen Abstand zur Ebene T die Länge $\frac{18}{\sqrt{66}}$ hat.

c) *Begründung einer Schargeraden:*

Die Ebene $x_3 = 3{,}5$ ist eine Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene im Abstand $3{,}5$. Die x_3-Koordinate des Aufpunktes der Geraden g_a ist ebenfalls $3{,}5$. Sollte g_a in $x_3 = 3{,}5$ verlaufen, muss die x_3-Kooridnate des Richtungsvektors von g_a Null sein. Diese Koordinate hat den Wert $x_3 = \frac{2}{a}$. Dieser Ausdruck kann nie Null werden.

Prüfung ob Schnittgerade von T und U Schargerade von g_a ist:

Liegt Aufpunkt g_a in T?:

$5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3{,}5 \stackrel{?}{=} 30$

$30 = 30$ | Punkt $\in T$

Liegt Aufpunkt g_a in U?:

$-5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3{,}5 \stackrel{?}{=} 5$

$5 = 5$ | Punkt $\in U$

$T \cap U$:

(1) $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

(2) $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$

Zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten, wir wählen eine Unbekannte frei, z.B. $x_3 = t$.

(1) $5x_1 + 4x_2 + 5t = 30$

(2) $-5x_1 + 4x_2 + 5t = 5$

(1)+(2) $8x_2 = 35 - 10t$

$x_2 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4}t$

$x_2; x_3 \rightarrow (1)$

(1) $5x_1 + 4\left(\frac{35}{8} - \frac{5}{4}t\right) + 5t = 30$

$5x_1 + \frac{35}{2} - 5t + 5t = 30$

$5x_1 = 30 - 17{,}5 = 12{,}5$

$x_1 = 2{,}5$

$\mathbb{L} = \left(x_1; x_2; x_3 | 2{,}5; \frac{35}{8} - \frac{5}{4}t; t\right)$

Schnittgerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4{,}375 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vergleich der Richtungsvektoren:

$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad ==> \quad a = \frac{1}{2}$

Die Schnittgerade von T und U gehört zur Geradenschar g_a.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

Lösung B2

Lösungslogik

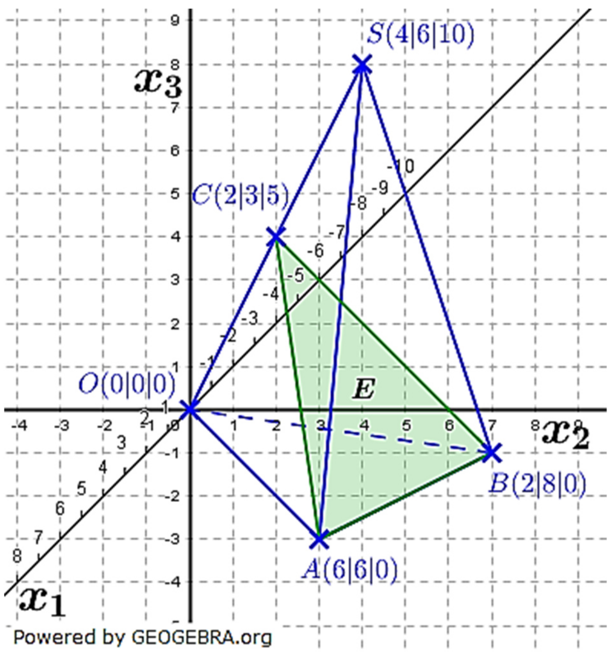
a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinatenform der Ebene E:
Wir bilden den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Mit Hilfe dieses Normalenvektors und dem Punkt A bilden wir dann die Koordinatengleichung von E.

b) *Nachweis gleichschenkliges Dreieck ABC:*
Zwei der drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ müssen gleiche Länge haben.
Volumen der Dreieckspyramide:
Wir berechnen das Volumen über das Spatprodukt.

c) *Verfahrensbeschreibung:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Koordinatenform der Ebene E:

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ==> \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

$6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = d$ | Punktprobe mit $A(6|6|0)$

$d = 18$

$E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

b) *Nachweis gleichschenkliges Dreieck ABC:*

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\5\\-5\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{AC}\right|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Volumen der Dreieckspyramide:

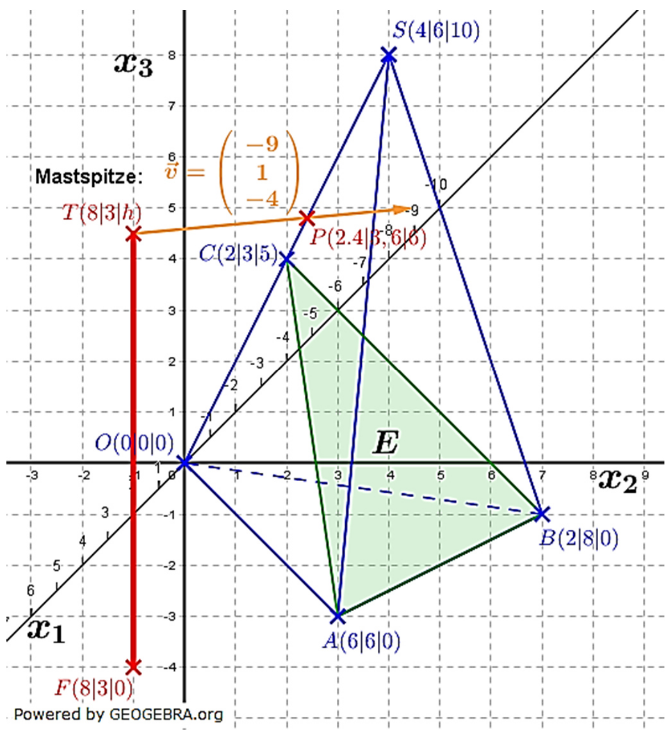
$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AO}\right)\right)\circ\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\36\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|180|=30$$

Das Volumen der Dreieckspyramide beträgt $30\,VE$.

c) *Verfahrensbeschreibung:*

Die Abbildung verdeutlicht die Situation. Die Mastspitze sei T, dann sind die Koordinaten der Mastspitze $T(6|3|h)$.
Der Sonnenstrahl, der die Mastspitze trifft, verläuft in einer Geraden g mit dem Aufpunkt T und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Sonnenstrahlen. Diese Gerade muss nach Aufgabenstellung die Kante OS treffen. Die Kante kann als Gerade l beschrieben werden mit dem Aufpunkt O und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{OS}$.
Die Gerade g wird mit der Geraden l geschnitten und die Höhe h des Mastes so bestimmt, dass sich g und l schneiden und nicht windschief sind.



Berechnung für den Interessierten (nicht Forderung der Aufgabe).
Gerade g:

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\3\\h\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-9\\1\\-4\end{pmatrix}$$

Gerade l:

$$l:\ \vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\10\end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

$g \cap l$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

$s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$

(1)	$-9s - 4t = -8$		
(2)	$s - 6t = -3$	|	$\cdot 9$
(3)	$-4s - 10t = -h$		
(1)	$-9s - 4t = -8$		
(2)	$9s - 54t = -27$		
(3)	$-4s - 10t = -h$		
(1)+(2)	$-58t = -35$	|	$:(-58)$
	$t = \frac{35}{58}$		

$t \rightarrow (2)$

(2)	$s - 6 \cdot \frac{35}{58} = -3$	|	$+6 \cdot \frac{35}{58}$
	$s = \frac{18}{29}$		

$s, t \rightarrow (3)$

(3)	$-4 \cdot \frac{18}{29} - 10 \cdot \frac{35}{58} = -h$
	$h = \frac{247}{29} \approx 8{,}5$

Die Höhe des Mastes muss etwa $8{,}5\ m$ *betragen.*

Berechnung des Auftreffpunktes:

$\overrightarrow{OP} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{35}{58} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 3{,}6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt der Mastspitze befindet sich im Punkt $P(2{,}4|3{,}6|6)$