

*Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW*

**Lösung B1**

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

Siehe Klausuraufschrieb.

*Nachweis eines gleichschenkligen Trapezes:*

Zwei der Vektoren  $\overrightarrow{KL}$ ,  $\overrightarrow{LM}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  und  $\overrightarrow{KN}$  sind linear abhängig (parallel), die anderen beiden Vektoren müssen gleiche Länge haben.

*Koordinatenform der Ebene T:*

Wir bilden den Normalenvektor  $\vec{n}_T$  von T über das Kreuzprodukt der Vektoren  $\overrightarrow{KL}$  und  $\overrightarrow{KN}$  (andere Vektorkombinationen möglich) und stellen darüber die Koordinatenform von T auf.

b) *Spitze einer Pyramide:*

Wir prüfen, welcher Punkt S auf der Geraden durch F und G gibt, der von der Ebene T den Abstand  $\frac{18}{\sqrt{66}}$  hat. Ergibt sich die Lage dieses Punktes zwischen den Punkten F und G, so ist die Prüfung erfolgreich, ansonsten nicht.

c) *Begründung einer Schargeraden:*

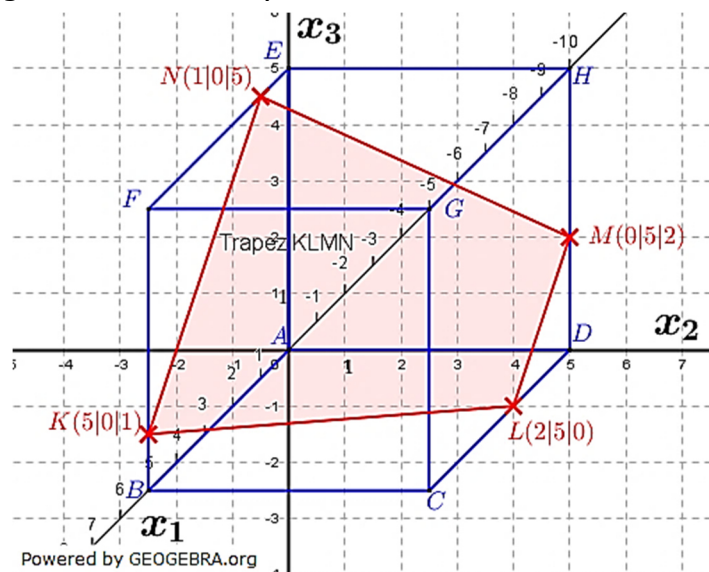
Siehe Klausuraufschrieb.

*Prüfung ob Schnittgerade von T und U Schargerade von  $g_a$  ist:*

Zunächst prüfen wir, ob der Aufpunkt der Schargeraden sowohl in T als auch in U liegt. Ist dies der Fall, schneiden die beiden Ebenen T und U und bestimmen daraus die Schnittgerade. Dann prüfen wir, ob es ein a gibt, sodass der Richtungsvektor der Schnittgeraden ein Vielfaches des Richtungsvektors der Schargeraden ist.

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



**Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW**

Nachweis eines gleichschenkligen Trapezes:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{KN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$$

Die Strecken  $KN$  und  $LM$  sind die beiden parallelen Seiten des Trapezes.

$$|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

Wegen  $\overrightarrow{KN} \parallel \overrightarrow{LM} \wedge |\overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{MN}|$  ist das Viereck  $KLMN$  ein gleichschenkliges Trapez.

Koordinatenform der Ebene  $T$ :

$$k \cdot \vec{n}_T = \overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \vec{n}_T = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$$

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 30$$

$$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$$

| Punktprobe mit  $K(5|0|1)$

b) Spitze einer Pyramide:

Gerade  $g$  durch  $F$  und  $G$ :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OF} + r \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Pyramidenspitze hat die Koordinaten  $S(5|5r|5)$

Abstand von  $S$  zur Ebene  $T$ :

$$T: \frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{25 + 16 + 25}} = 0 \quad | \quad \text{HNF}$$

$$d(S; T) = \frac{|5 \cdot 5 + 4 \cdot 5r + 5 \cdot 5 - 30|}{\sqrt{66}} = \frac{|20 + 20r|}{\sqrt{66}}$$

$$\frac{|20 + 20r|}{\sqrt{66}} = \frac{18}{\sqrt{66}}$$

$$|20 + 20r| = 18$$

$$20r_1 = -2$$

$$r_1 = -0,1$$

$$20 + 20r_2 = -18$$

$$20r_2 = -38$$

$$r_2 = -1,9$$

| Fall 1

| Fall 2

Die Pyramidenspitze liegt zwischen den Punkten  $F$  und  $G$  für  $0 < r < 1$ . Dies ist hier nicht der Fall, sodass es keinen Punkt  $S$  auf der Strecke  $FG$  gibt, dessen Abstand zur Ebene  $T$  die Länge  $\frac{18}{\sqrt{66}}$  hat.

*Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW*

c) *Begründung einer Schargeraden:*

Die Ebene  $x_3 = 3,5$  ist eine Ebene parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene im Abstand 3,5. Die  $x_3$ -Koordinate des Aufpunktes der Geraden  $g_a$  ist ebenfalls 3,5. Sollte  $g_a$  in  $x_3 = 3,5$  verlaufen, muss die  $x_3$ -Koordinate des Richtungsvektors von  $g_a$  Null sein. Diese Koordinate hat den Wert  $x_3 = \frac{2}{a}$ . Dieser Ausdruck kann nie Null werden.

*Prüfung ob Schnittgerade von T und U Schargerade von  $g_a$  ist:*

Liegt Aufpunkt  $g_a$  in T?:

$$5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3,5 \stackrel{!}{=} 30$$

$$30 = 30$$

| Punkt  $\in T$

Liegt Aufpunkt  $g_a$  in U?:

$$-5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3,5 \stackrel{!}{=} 5$$

$$5 = 5$$

| Punkt  $\in U$

$T \cap U$ :

$$(1) \quad 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$$

$$(2) \quad -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$$

Zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten, wir wählen eine Unbekannte frei, z.B.

$x_3 = t$ .

$$(1) \quad 5x_1 + 4x_2 + 5t = 30$$

$$(2) \quad -5x_1 + 4x_2 + 5t = 5$$

$$(1)+(2) \quad 8x_2 = 35 - 10t$$

$$x_2 = \frac{35}{8} - \frac{5}{4}t$$

$x_2; x_3 \rightarrow (1)$

$$(1) \quad 5x_1 + 4\left(\frac{35}{8} - \frac{5}{4}t\right) + 5t = 30$$

$$5x_1 + \frac{35}{2} - 5t + 5t = 30$$

$$5x_1 = 30 - 17,5 = 12,5$$

$$x_1 = 2,5$$

$$\mathbb{L} = \left(x_1; x_2; x_3 \mid 2,5; \frac{35}{8} - \frac{5}{4}t; t\right)$$

$$\text{Schnittgerade } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,375 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vergleich der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \implies a = \frac{1}{2}$$

*Die Schnittgerade von T und U gehört zur Geradenschar  $g_a$ .*

*Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW*

**Lösung B2**

**Lösungslogik**

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

Siehe Klausuraufschrieb.

*Koordinatenform der Ebene E:*

Wir bilden den Normalenvektoren  $\vec{n}_E$  über das Kreuzprodukt der Vektoren  $\vec{AB}$  und  $\vec{AC}$ . Mit Hilfe dieses Normalenvektors und dem Punkt A bilden wir dann die Koordinatengleichung von E.

b) *Nachweis gleichschenkliges Dreieck ABC:*

Zwei der drei Vektoren  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  und  $\vec{BC}$  müssen gleiche Länge haben.

*Volumen der Dreieckspyramide:*

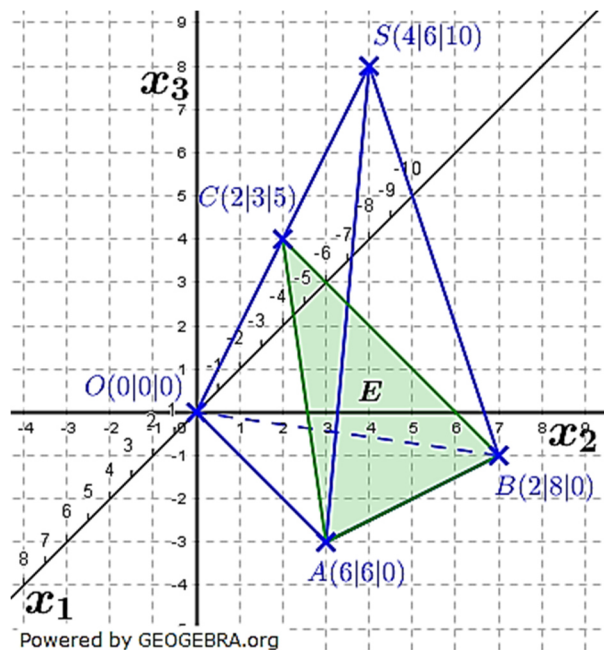
Wir berechnen das Volumen über das Spatprodukt.

c) *Verfahrensbeschreibung:*

Siehe Klausuraufschrieb.

**Klausuraufschrieb**

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



*Koordinatenform der Ebene E:*

$$k \cdot \vec{n}_E = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$$

$$6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = d$$

$$d = 18$$

$$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$$

| Punktprobe mit A(6|6|0)

**Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW**

b) Nachweis gleichschenkliges Dreieck ABC:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

Wegen  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$  ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

Volumen der Dreieckspyramide:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO})) \cdot \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{6} \cdot \left| \left( \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |180| = 30$$

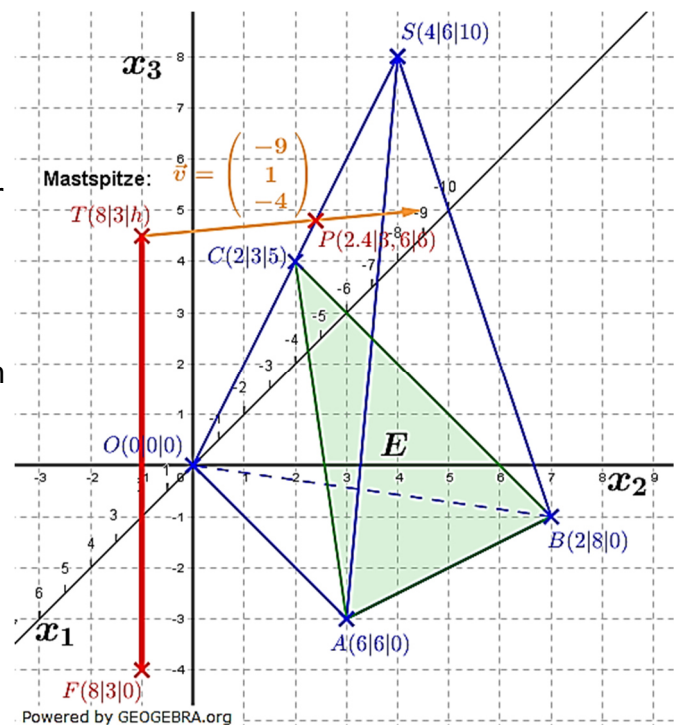
Das Volumen der Dreieckspyramide beträgt 30 VE.

c) Verfahrensbeschreibung:

Die Abbildung verdeutlicht die Situation. Die Mastspitze sei  $T$ , dann sind die Koordinaten der Mastspitze  $T(6|3|h)$ .

Der Sonnenstrahl, der die Mastspitze trifft, verläuft in einer Geraden  $g$  mit dem Aufpunkt  $T$  und dem Richtungsvektor  $\vec{v}$  der Sonnenstrahlen. Diese Gerade muss nach Aufgabenstellung die Kante  $OS$  treffen. Die Kante kann als Gerade  $l$  beschrieben werden mit dem Aufpunkt  $O$  und dem Richtungsvektor  $\overrightarrow{OS}$ .

Die Gerade  $g$  wird mit der Geraden  $l$  geschnitten und die Höhe  $h$  des Mastes so bestimmt, dass sich  $g$  und  $l$  schneiden und nicht windschief sind.



Berechnung für den Interessierten (nicht Forderung der Aufgabe).

Gerade  $g$ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gerade  $l$ :

$$l: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2019 BW

$g \cap l$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad -9s - 4t = -8$$

$$(2) \quad s - 6t = -3 \quad | \quad \cdot 9$$

$$(3) \quad -4s - 10t = -h$$

$$(1) \quad -9s - 4t = -8$$

$$(2) \quad 9s - 54t = -27$$

$$(3) \quad -4s - 10t = -h$$

$$(1)+(2) \quad -58t = -35 \quad | \quad :(-58)$$

$$t = \frac{35}{58}$$

$t \rightarrow (2)$

$$(2) \quad s - 6 \cdot \frac{35}{58} = -3 \quad | \quad +6 \cdot \frac{35}{58}$$

$$s = \frac{18}{29}$$

$s, t \rightarrow (3)$

$$(3) \quad -4 \cdot \frac{18}{29} - 10 \cdot \frac{35}{58} = -h$$

$$h = \frac{247}{29} \approx 8,5$$

Die Höhe des Mastes muss etwa 8,5 m betragen.

Berechnung des Auftreffpunktes:

$$\vec{OP} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{35}{58} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 3,6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt der Mastspitze befindet sich im Punkt  $P(2,4|3,6|6)$