



### Aufgabe B1.1

Die Gerade  $g$  enthält die Punkte  $A(1|1|1)$  und  $B(3|5|1)$ .

- a) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den  $g$  mit der  $x_2x_3$ -Ebene einschließt.  
Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes von  $g$ , der von der  $x_2x_3$ -Ebene den Abstand 7 hat.
- b) Für die Ebene  $E$  gilt:  
Wenn man den Punkt  $A$  an  $E$  spiegelt, erhält man den Punkt  $B$ .  
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ .

### Aufgabe B1.2

Für jede reelle Zahl  $k$  ist eine Ebene  $E_k$  gegeben durch

$$E_k: (k+1) \cdot x_1 + x_2 + (k-1) \cdot x_3 = 1.$$

- a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade von  $E_1$  und  $E_3$ .  
Untersuchen Sie, ob diese Schnittgerade in jeder Ebene  $E_k$  liegt.
- b) Die Gerade  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  schneidet die Ebene  $E_3$  im Punkt  $P$  und eine weitere Ebene  $E_k$  im Punkt  $Q$ . Der Abstand von  $P$  und  $Q$  beträgt 12.  
Berechnen Sie einen möglichen Wert von  $k$ .

### Aufgabe B2

Die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(6|1|0)$ ,  $C(-2|7|0)$  und  $S(2|4|10)$  sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide  $ABCS$ . Die Ebene  $E$  enthält die Punkte  $B, C$  und  $S$ .

- a) Stellen Sie die Pyramide  $ABCS$  in einem Koordinatensystem dar.  
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Kante  $\overline{AS}$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt.  
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E$ .  
Beschreiben Sie die besondere Lage von  $E$  im Koordinatensystem.  
(Teilergebnis:  $E: 3x_1 + 4x_2 = 22$ )
- b) Es gibt Punkte, die in  $E$  liegen und von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind.  
Bestimmen Sie die Koordinaten zweier solcher Punkte.
- c) Betrachtet wird im Folgenden das Dreieck  $BCS$ .  
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.  
Das Dreieck  $BCS$  kann so um die Strecke  $\overline{BC}$  gedreht werden, dass das Bild  $S^*$  des Punktes  $S$  in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt.  
Berechnen Sie für eine mögliche Lage des Punktes  $S^*$  dessen Koordinaten.

### Lösung B1.1

#### Lösungslogik

- a) *Winkel zwischen  $g$  und  $x_2x_3$ -Ebene:*  
Wir stellen die Gleichung der Geraden  $g$  auf und berechnen den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene über den  $\sin$ .

*Koordinaten eines Punktes von  $g$  mit Abstand 7 zur  $x_2x_3$ -Ebene:*  
Grundlage der Berechnung ist die HNF, Abstand Punkt/Gerade.

- b) *Bestimmung einer Gleichung der Ebene  $E$ :*  
Wegen des Spiegelpunktes  $B$  von  $A$  verläuft die Ebene  $E$  durch den Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Der Normalenvektor der Ebene ist dabei der Richtungsvektor  $\overrightarrow{AB}$  der Geraden  $g$ .

#### Klausuraufschrieb

- a) *Winkel zwischen  $g$  und  $x_2x_3$ -Ebene:*  
Aufstellung der Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel Gerade Ebene:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{n}_{x_2x_3}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{n}_{x_2x_3}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{|\sqrt{20}| \cdot |1|} = \frac{2}{\sqrt{20}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right) = 26,56^\circ$$

*Koordinaten eines Punktes von  $g$  mit Abstand 7 zur  $x_2x_3$ -Ebene:*  
Einfach:

Die  $x_1$ -Koordinate des Punktes muss den Wert  $|7|$  aufweisen:  
Aus der Geradengleichung lesen wir ab:

$$x_1 = 1 + 2r$$

$$|1 + 2r| = 7$$

$$1 + 2r_1 = 7$$

$$2r_1 = 6 \rightarrow r_1 = 3$$

$$1 + 2r_2 = -7$$

$$2r_2 = -8 \rightarrow r_2 = -4$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umständlich über die HNF:

Gleichung der  $x_2x_3$ -Ebene:  $x_1 = 0$

$$\text{HNF: } \frac{x_1}{1} = 0$$

Abstand 7 eines Punktes der Geraden von der Ebene:

$$\frac{|1+2r|}{1} = 7$$

Weiter siehe bei Lösungsteil „Einfach“.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin  
2019

b) *Bestimmung einer Gleichung der Ebene E:*

Die Ebene  $E$  verläuft durch den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$ .

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene ist gleich dem Richtungsvektor  $\overrightarrow{AB}$ :

$$E: 2x_1 + 4x_2 = d$$

Punktprobe mit  $M$ :

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = d$$

$$2 = 16$$

$$E: 2x_1 + 4x_2 = 16$$

### Lösung B1.2

#### Lösungslogik

a) *Schnittgerade von  $E_1$  und  $E_3$ :*

Wir bilden und ermitteln den Lösungsvektor des Gleichungssystems.

*Untersuchung, ob Schnittgerade in jeder Ebene  $E_k$  liegt:*

Wir setzen die Gleichung der Schnittgeraden in die Ebene  $E_k$  ein und prüfen das Ergebnis.

b) *Berechnung eines möglichen Wertes von  $k$ , sodass Abstand  $P$  zu  $Q$  den Wert 12 aufweist.*

Wir bestimmen den Schnittpunkt  $P$  von  $h$  mit  $E_3$  und den Schnittpunkt  $Q$  von  $h$  mit  $E_k$ . Danach berechnen wir  $k$  für  $|\overrightarrow{PQ}| = 12$ .

#### Klausuraufschrieb

a) *Schnittgerade von  $E_1$  und  $E_3$ :*

$$(I) \quad 2 \cdot x_1 + x_2 = 1$$

$$(II) \quad 4 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 1$$

Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, wir müssen eine Unbekannte frei wählen, z. B.  $x_2 = t$ .

$$(I) \quad 2 \cdot x_1 + t = 1$$

$$x_1 = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}$$

$$x_1; x_2 \rightarrow (II)$$

$$(II) \quad 4 \cdot \frac{1-t}{2} + t + 2 \cdot x_3 = 1$$

$$2(1-t) + t + 2x_3 = 1$$

$$2x_3 = 1 - t - 2 + 2t$$

$$2x_3 = t - 1$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2}$$

Lösungsvektor:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ t \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} \right\}$$

Schnittgerade:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin  
2019

Untersuchung, ob Schnittgerade in jeder Ebene  $E_k$  liegt:

Wir setzen  $g$  in  $E_k$  ein. Aus  $g$  folgt:

$$x_1 = 0,5 - t; \quad x_2 = 2t; \quad x_3 = -0,5 + t$$

$$E_k: (k+1) \cdot (0,5 - t) + 2t + (k-1) \cdot (-0,5 + t) \stackrel{!}{=} 1$$

$$0,5k - kt + 0,5 - t + 2t - 0,5k + tk + 0,5 - t \stackrel{!}{=} 1$$

$$1 = 1$$

Die Gerade  $g$  liegt in jeder Ebene  $E_k$ .

- b) Berechnung eines möglichen Wertes von  $k$ , sodass Abstand  $P$  zu  $Q$  den Wert 12 aufweist.

Schnittpunkt  $P$  von  $h$  mit  $E_3$ :

Aus  $h$  folgt:

$$x_1 = 1 + r; \quad x_2 = 3 - 2r; \quad x_3 = 2r$$

$$E_3: 4 \cdot (1 + r) + 3 - 2r + 2 \cdot 2r = 1$$

$$4 + 4r + 3 - 2r + 4r = 1$$

$$6r + 7 = 1$$

$$6r = -6$$

$$r = -1$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt  $Q$  von  $h$  mit  $E_k$ :

Aus  $h$  folgt:

$$x_1 = 1 + r; \quad x_2 = 3 - 2r; \quad x_3 = 2r$$

$$E_k: (k+1) \cdot (1 + r) + 3 - 2r + (k-1) \cdot 2r = 1$$

$$k + kr + 1 + r + 3 - 2r + 2kr - 2r = 1$$

$$3kr - 3r + k + 4 = 1$$

$$r(3k - 3) + k + 4 = 1$$

$$r(3k - 3) = 1 - k - 4$$

$$r = \frac{-k-3}{3k-3}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{k+3}{3k-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k+3}{3k-3} \\ 3 + 2 \cdot \frac{k+3}{3k-3} \\ -2 \cdot \frac{k+3}{3k-3} \end{pmatrix}$$

Substitution:

$$z = \frac{k+3}{3k-3}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z \\ 3 + 2 \cdot z \\ -2 \cdot z \end{pmatrix}$$

Wir bilden den Vektor  $\vec{PQ}$ :

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - z - 0 \\ 3 + 2 \cdot z - 5 \\ -2 \cdot z + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z \\ -2 + 2z \\ 2 - 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}| &= \sqrt{(1-z)^2 + (-2+2z)^2 + (2-2z)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2z + z^2 + 4 - 8z + 4z^2 + 4 - 8z + 4z^2} \\ &= \sqrt{9z^2 - 18z + 9} \end{aligned}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin  
2019

Laut Aufgabenstellung soll  $|\overline{PQ}| = 12$  sein.

$$\sqrt{9z^2 - 18z + 9} = 12$$

$$9z^2 - 18z + 9 = 144$$

$$9z^2 - 18z - 135 = 0$$

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$$

$$z_1 = 5; z_2 = -3$$

Resubstitution:

$$\frac{k+3}{3k-3} = z$$

$$k + 3 = 3kz - 3z$$

$$k - 3kz = -3z - 3$$

$$k(1 - 3z) = -3z - 3$$

$$k = -\frac{3z+3}{1-3z}$$

$$k_1 = -\frac{1-3z}{3z+3} = -\frac{1-3 \cdot 5}{3 \cdot 5+3} = -\frac{-14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$k_2 = -\frac{1-3z}{3z+3} = -\frac{1-3 \cdot (-3)}{3 \cdot (-3)+3} = -\frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

Für  $k = \frac{7}{9}$  oder  $k = \frac{4}{3}$  haben die Punkte  $P$  und  $Q$  den Abstand 12.

## Lösung B1.2

### Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

Siehe Klausuraufschrieb.

*Winkel, den die Kante  $\overline{AS}$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt:*

Dies ist der Schnittwinkel zwischen dem Vektor  $\overline{AS}$  und der  $x_1x_2$ -Ebene. Berechnung über den  $\sin(\varphi)$ .

*Koordinatengleichung der Ebene  $E$ :*

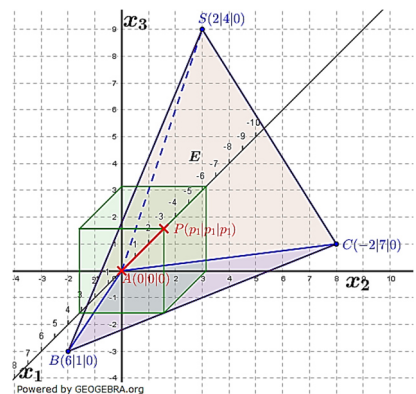
Wir bilden den Normalenvektor über das Kreuzprodukt der Vektoren  $\overline{BC}$  und  $\overline{BS}$ . Über eine Punktprobe mit dem Punkt  $B$  ermitteln wir den Parameter  $d$  der Ebenengleichung.

*Besondere Lage von  $E$  im Koordinatensystem:*

Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten zweier Punkte von  $E$ , die von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind:*

Punkte, die von den drei Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind, müssen für  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  denselben Betrag aufweisen, sind sozusagen Endpunkte der Würfeldiagonalen, die vom Ursprung ausgeht. So ist z. Bsp. der Punkt  $P$  mit  $P(p_1|p_1|p_1)$  ein solcher Punkt. Da dieser Punkt in der Ebene liegen soll, muss er die Ebenengleichung erfüllen.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin  
2019

- c) *Nachweis, dass das Dreieck BCS gleichschenkelig ist:*  
Ein Dreieck ist gleichschenkelig wenn die Länge von zwei Seiten übereinstimmen und die dritte Seite nicht gleich lang ist.

*Koordinaten eines Bildpunkte S\*:*

Die Drehgerade BC liegt in der  $x_1x_2$ -Ebene. Sie ist gleichzeitig Basis des gleichschenkeligen Dreiecks BCS. Der Lotfußpunkt L der Höhe  $h_{bc}$  ist somit der Mittelpunkt der Strecke BC. Die Ebene E steht senkrecht auf der  $x_1x_2$ -Ebene. Damit muss auch  $S^*$  in der  $x_1x_2$ -Ebene liegen.

Wir müssen vom Lotfußpunkt L lediglich die Länge der Höhe  $h_{BC}$  in Richtung des Normalenvektors von E laufen, um zum Punkt  $S^*$  zu gelangen (siehe auch erläuternde Grafik beim Klausuraufschrieb).

Klausuraufschrieb

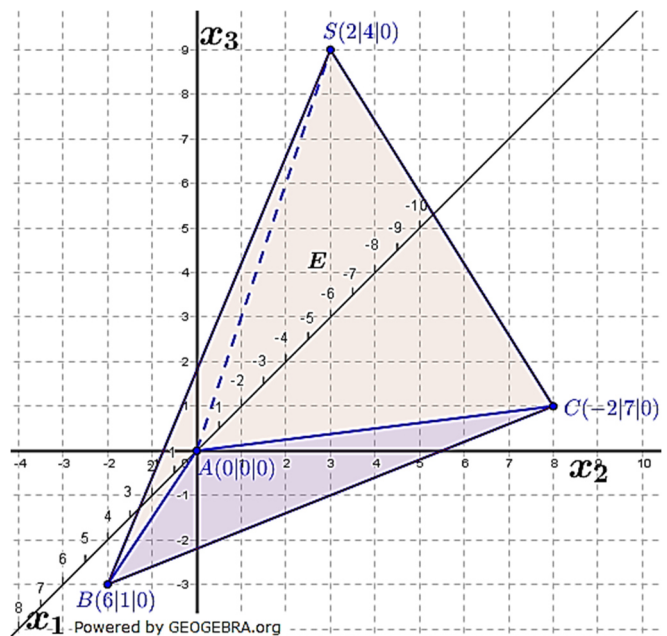
- a) *Darstellung in Koordinatensystem:*

*Winkel, den die Kante  $\overline{AS}$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt:*

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n}_{x_1x_2} \circ \overline{AS}|}{|\vec{n}_{x_1x_2}| \cdot |\overline{AS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 10^2}} = \frac{10}{\sqrt{120}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{10}{\sqrt{120}}\right) = 65,9^\circ$$

*Der Winkel, den die Kante  $\overline{AS}$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt, beträgt  $65,9^\circ$ .*



*Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \vec{n}_e = \overline{BC} \times \overline{BS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 4x_2 = d$$

$$3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = d = 22$$

$$3x_1 + 4x_2 = 22$$

*Besondere Lage von E im Koordinatensystem:*

In der Ebenengleichung fehlt die  $x_3$ -Koordinate, deshalb ist E parallel zur  $x_3$ -Achse und steht damit senkrecht auf der  $x_1x_2$ -Ebene.

- b) *Koordinaten zweier Punkte von E, die von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind:*  
 Ein solcher Punkt hat drei gleichgroße Koordinaten, z. Bsp. P mit  $P(p_1|p_1|p_1)$ .  
 Ein solcher Punkt ist der Endpunkt der Diagonalen eines Würfels, die vom Ursprung ausgeht. Der Punkt muss der Ebenengleichung Genüge leisten.  
 Somit muss gelten:  
 $3p_1 + 4p_1 = 22 \rightarrow p_1 = \frac{22}{7}$   
 Der Punkt  $P\left(\frac{22}{7} \mid \frac{22}{7} \mid \frac{22}{7}\right)$  der Ebene hat von den drei Koordinatenebenen den gleichen Abstand  $\frac{22}{7}$ .  
 Dieser Punkt liegt im 1. Oktanten. Ein zweiter Punkt ist Q mit  $Q(-q_1|q_1|q_1)$ .  
 Auch dieser Punkt muss der Ebenengleichung Genüge leisten. Es gilt:  
 $-3q_1 + 4q_1 = 22 \rightarrow q_1 = 22$   
 Der Punkt  $Q(-22 \mid 22 \mid 22)$  der Ebene 2 hat von den drei Koordinatenebenen den gleichen Abstand 22.

- c) *Nachweis, dass das Dreieck BCS gleichschenkelig ist:*

$$|\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 7 & -1 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$|\overline{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -1 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{CS}| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -(-2) \\ 4 & -7 \\ 0 & -0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Wegen  $|\overline{BS}| = |\overline{CS}| \neq |\overline{BC}|$  ist das Dreieck BCS gleichschenkelig mit der Basis  $\overline{BC}$ .

*Koordinaten eines Bildpunkte S\*:*

Lotfußpunkt der Höhe  $h_{BC}$ :

$$\overline{OL} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OB} + \overline{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Höhe  $h_{BC}$  im Dreieck BCS:

$$h_{BC} = |\overline{SL}| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 10$$

$h_{BC} = 10 \text{ LE}$

$$\begin{aligned} \overline{OS^*} &= \overline{OL} + \frac{10}{|\overline{n_E}|} \cdot \overline{n_E} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Spiegelpunkt hat die Koordinaten  $S^*(8|12|0)$ .

