Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin 2019

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Winkel zwischen g und x_2x_3-Ebene:*
Wir stellen die Gleichung der Geraden g auf und berechnen den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene über den sin.

Koordinaten eines Punktes von g mit Abstand 7 zur x_2x_3-Ebene:
Grundlage der Berechnung ist die HNF, Abstand Punkt/Gerade.

b) *Bestimmung einer Gleichung der Ebene E:*
Wegen des Spiegelpunktes B von A verläuft die Ebene E durch den Mittelpunkt der Strecke AB. Der Normalenvektor der Ebene ist dabei der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Geraden g.

Klausuraufschrieb

a) *Winkel zwischen g und x_2x_3-Ebene:*
Aufstellung der Geradengleichung:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Schnittwinkel Gerade Ebene:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{n_{x_2x_3}}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_2x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{|\sqrt{20}| \cdot |1|} = \frac{2}{\sqrt{20}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right) = 26{,}56\,°$$

Koordinaten eines Punktes von g mit Abstand 7 zur x_2x_3-Ebene:
Einfach:
Die x_1-Koordinate des Punktes muss den Wert |7| aufweisen:
Aus der Geradengleichung lesen wir ab:

$x_1 = 1 + 2r$
$|1 + 2r| = 7$
$1 + 2r_1 = 7$
$2r_1 = 6 \;\Rightarrow\; r_1 = 3$
$1 + 2r_2 = -7$
$2r_2 = -8 \;\Rightarrow\; r_2 = -4$

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\13\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-15\\1\end{pmatrix}$$

Umständlich über die HNF:
Gleichung der x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$
HNF: $\frac{x_1}{1} = 0$
Abstand 7 eines Punktes der Geraden von der Ebene:
$\frac{|1+2r|}{1} = 7$
Weiter siehe bei Lösungsteil „Einfach".

b) *Bestimmung einer Gleichung der Ebene E:*
Die Ebene E verläuft durch den Mittelpunkt M der Strecke AB.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor der Ebene ist gleich dem Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}$:
$E\colon\ 2x_1+4x_2=d$
Punktprobe mit M:
$2\cdot 2+4\cdot 3=d$
$2=16$
$E\colon\ 2x_1+4x_2=16$

Lösung B1.2

Lösungslogik

a) *Schnittgerade von E_1 und E_3:*
Wir bilden und ermitteln den Lösungsvektor des Gleichungssystems.
Untersuchung, ob Schnittgerade in jeder Ebene E_k liegt:
Wir setzen die Gleichung der Schnittgeraden in die Ebene E_k ein und prüfen das Ergebnis.

b) *Berechnung eines möglichen Wertes von k, sodass Abstand P zu Q den Wert 12 aufweist.*
Wir bestimmen den Schnittpunkt P von h mit E_3 und den Schnittpunkt Q von h mit E_k. Danach berechnen wir k für $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=12$.

Klausuraufschrieb

a) *Schnittgerade von E_1 und E_3:*
(I) $2\cdot x_1+x_2=1$
(II) $4\cdot x_1+x_2+2\cdot x_3=1$
Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, wir müssen eine Unbekannte frei wählen, z. B. $x_2=t$.
(I) $2\cdot x_1+t=1$
$x_1=\frac{1-t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}$
$x_1;\ x_2\rightarrow(II)$
(II) $4\cdot\frac{1-t}{2}+t+2\cdot x_3=1$
$2(1-t)+t+2x_3=1$
$2x_3=1-t-2+2t$
$2x_3=t-1$
$x_3=\frac{1}{2}\cdot t-\frac{1}{2}$
Lösungsvektor:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{1}-\frac{t}{2}\\t\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\end{pmatrix}\right\}$$

Schnittgerade:

$$g\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}+t^*\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin 2019

Untersuchung, ob Schnittgerade in jeder Ebene E_k liegt:
Wir setzen g in E_k ein. Aus g folgt:
$x_1 = 0{,}5 - t;\quad x_2 = 2t;\quad x_3 = -0{,}5 + t$
E_k: $(k+1)\cdot(0{,}5 - t) + 2t + (k-1)\cdot(-0{,}5 + t) \stackrel{?}{=} 1$
$0{,}5k - kt + 0{,}5 - t + 2t - 0{,}5k + tk + 0{,}5 - t \stackrel{?}{=} 1$
$1 = 1$
Die Gerade g liegt in jeder Ebene E_k.

b) *Berechnung eines möglichen Wertes von k, sodass Abstand P zu Q den Wert 12 aufweist.*
Schnittpunkt P von h mit E_3:
Aus h folgt:
$x_1 = 1 + r;\quad x_2 = 3 - 2r;\quad x_3 = 2r$
E_3: $4\cdot(1+r) + 3 - 2r + 2\cdot 2r = 1$
$4 + 4r + 3 - 2r + 4r = 1$
$6r + 7 = 1$
$6r = -6$
$r = -1$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt Q von h mit E_k:
Aus h folgt:
$x_1 = 1 + r;\quad x_2 = 3 - 2r;\quad x_3 = 2r$
E_k: $(k+1)\cdot(1+r) + 3 - 2r + (k-1)\cdot 2r = 1$
$k + kr + 1 + r + 3 - 2r + 2kr - 2r = 1$
$3kr - 3r + k + 4 = 1$
$r(3k-3) + k + 4 = 1$
$r(3k-3) = 1 - k - 4$
$r = \frac{-k-3}{3k-3}$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{k+3}{3k-3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - \frac{k+3}{3k-3}\\3 + 2\cdot\frac{k+3}{3k-3}\\-2\cdot\frac{k+3}{3k-3}\end{pmatrix}$$

Substitution:
$z = \frac{k+3}{3k-3}$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} - z\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - z\\3 + 2\cdot z\\-2\cdot z\end{pmatrix}$$

Wir bilden den Vektor $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}1 - z - 0\\3 + 2\cdot z - 5\\-2\cdot z + 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - z\\-2 + 2z\\2 - 2z\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(1-z)^2 + (-2+2z)^2 + (2-2z)^2}$$
$$= \sqrt{1 - 2z + z^2 + 4 - 8z + 4z^2 + 4 - 8z + 4z^2}$$
$$= \sqrt{9z^2 - 18z + 9}$$

Laut Aufgabenstellung soll $|\overrightarrow{PQ}| = 12$ sein.

$\sqrt{9z^2 - 18z + 9} = 12$
$9z^2 - 18z + 9 = 144$
$9z^2 - 18z - 135 = 0$
$z^2 - 2z - 15 = 0$
$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} = 1 \pm 4$
$z_1 = 5;\ \ z_2 = -3$

Resubstitution:

$\frac{k+3}{3k-3} = z$
$k + 3 = 3kz - 3z$
$k - 3kz = -3z - 3$
$k(1 - 3z) = -3z - 3$
$k = -\frac{3z+3}{1-3z}$
$k_1 = -\frac{3\cdot 5+3}{1-3\cdot 5} = -\frac{18}{-14} = \frac{9}{7}$
$k_2 = -\frac{3\cdot(-3)+3}{1-3\cdot(-3)} = -\frac{-6}{10} = \frac{3}{5}$

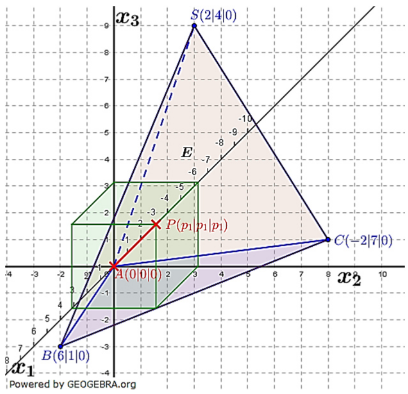
Für $k = \frac{9}{7}$ oder $k = \frac{3}{5}$ haben die Punkte P und Q den Abstand 12.

Lösung B1.2

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Winkel, den die Kante $\overline{AS}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt:
Dies ist der Schnittwinkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ und der x_1x_2-Ebene. Berechnung über den $\sin(\varphi)$.
Koordinatengleichung der Ebene E:
Wir bilden den Normalenvektor über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$. Über eine Punktprobe mit dem Punkt B ermitteln wir den Parameter d der Ebenengleichung.
Besondere Lage von E im Koordinatensystem:
Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten zweier Punkte von E, die von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind:*
Punkte, die von den drei Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind, müssen für x_1, x_2 und x_3 denselben Betrag aufweisen, sind sozusagen Endpunkte der Würfeldiagonalen, die vom Ursprung ausgeht. So ist z. Bsp. der Punkt P mit $P(p_1|p_1|p_1)$ ein solcher Punkt. Da dieser Punkt in der Ebene liegen soll, muss er die Ebenengleichung erfüllen.



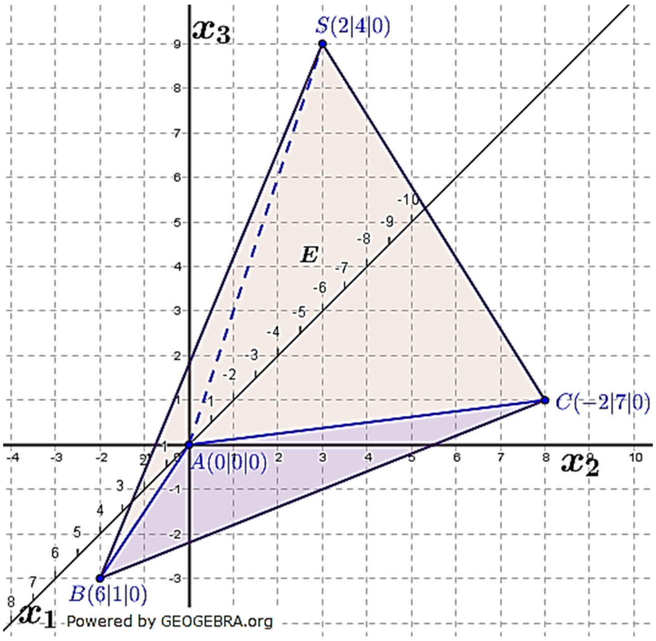
Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil Nachtermin 2019

c) *Nachweis, dass das Dreieck BCS gleichschenklig ist:*
Ein Dreieck ist gleichschenklig wenn die Länge von zwei Seiten übereinstimmen und die dritte Seite nicht gleich lang ist.

Koordinaten eines Bildpunkte S^*:
Die Drehgerade BC liegt in der x_1x_2-Ebene. Sie ist gleichzeitig Basis des gleichschenkligen Dreiecks BCS. Der Lotfußpunkt L der Höhe h_{bc} ist somit der Mittelpunkt der Strecke BC. Die Ebene E steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene. Damit muss auch S^* in der x_1x_2-Ebene liegen.
Wir müssen vom Lotfußpunkt L lediglich die Länge der Höhe h_{BC} in Richtung des Normalenvektors von E laufen, um zum Punkt S^* zu gelangen (siehe auch erläuternde Grafik beim Klausuraufschrieb).

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*



Winkel, den die Kante $\overline{AS}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt:

$$sin(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_{x_1x_2}} \circ \overrightarrow{AS}}{|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{120}}$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{10}{\sqrt{120}}\right) = 65{,}9\,°$$

Der Winkel, den die Kante $\overline{AS}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt, beträgt 65,9 °.

Koordinatengleichung der Ebene E:

$$k \cdot \overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\3\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\80\\0\end{pmatrix} = 20 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

$3x_1 + 4x_2 = d$
$3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = d = 22$
$3x_1 + 4x_2 = 22$

Besondere Lage von E im Koordinatensystem:
In der Ebenengleichung fehlt die x_3-Koordinate, deshalb ist E parallel zur x_3-Achse und steht damit senkrecht auf der x_1x_2-Ebene.

b) *Koordinaten zweier Punkte von E, die von allen Koordinatenebenen gleich weit entfernt sind:*
Ein solcher Punkt hat drei gleichgroße Koordinaten, z. Bsp. P mit $P(p_1|p_1|p_1)$. Ein solcher Punkt ist der Endpunkt der Diagonalen eines Würfels, die vom Ursprung ausgeht. Der Punkt muss der Ebenengleichung Genüge leisten. Somit muss gelten:
$3p_1 + 4p_1 = 22 \;\;➔\;\; p_1 = \frac{22}{7}$
Der Punkt $P\left(\frac{22}{7}\middle|\frac{22}{7}\middle|\frac{22}{7}\right)$ der Ebene hat von den drei Koordinatenebenen den gleichen Abstand $\frac{22}{7}$.
Dieser Punkt liegt im 1. Oktanten. Eine zweiter Punkt ist Q mit $Q(-q_1|q_1|q_1)$. Auch dieser Punkt muss der Ebenengleichung Genüge leisten. Es gilt:
$-3q_1 + 4q_1 = 22 \;\;➔\;\; q_1 = 22$
Der Punkt $Q(-22\,|22|22)$ der Ebene 2 hat von den drei Koordinatenebenen den gleichen Abstand 22.

c) *Nachweis, dass das Dreieck BCS gleichschenklig ist:*

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -2-6 \\ 7-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+36} = 10$$

$$|\overrightarrow{BS}| = \left|\begin{pmatrix} 2-6 \\ 4-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overrightarrow{CS}| = \left|\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-7 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9} = 5$$

Wegen $|\overrightarrow{BS}| = |\overrightarrow{CS}| \wedge |\overrightarrow{BS}| \neq |\overrightarrow{BC}|$ ist das Dreieck BCS gleichschenklig mit der Basis $\overline{BC}$.

Koordinaten eines Bildpunkte S^*:
Lotfußpunkt der Höhe h_{BC}:

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6-2 \\ 1+7 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Höhe h_{BC} im Dreieck BCS:

$$h_{BC} = |\overrightarrow{SL}| = \left|\begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-4 \\ 0-10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = 10$$

$$h_{BC} = 10\,LE$$

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OL} + \frac{10}{|\overrightarrow{n_E}|}\cdot\overrightarrow{n_E}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt hat die Koordinaten $S^*(8|12|0)$.