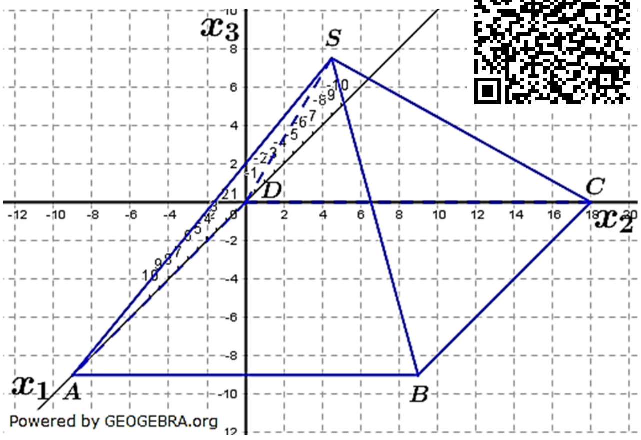
Aufgabe B1

Ein Ausstellungsraum hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte des Bodens können in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Punkte $A(18|0|0)$, $B(18|18|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(0|0|0)$ dargestellt werden (siehe Abbildung).
Die Spitze des Raumes wird durch den Punkt $S(9|9|12)$ beschrieben, die rechte Seitenwand durch das gleichschenklige Dreieck BCS (alle Koordinatenangaben in Metern).



a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Kanten, die durch die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{BS}$ beschrieben werden.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck BCS liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der rechten Seitenwand.
(Teilergebnis: E: $4x_2 + 3x_3 = 72$)

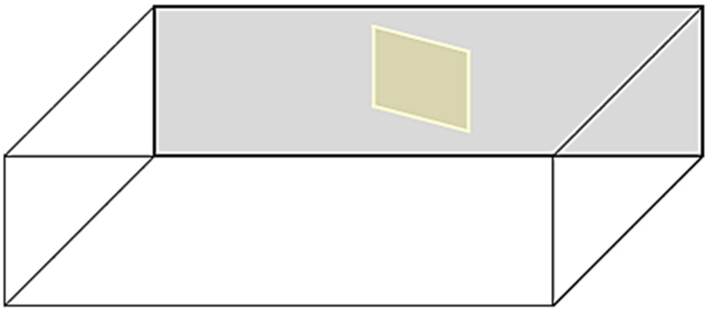
Eine punktförmige Lampe befindet sich am unteren Ende einer fünf Meter langen Stange, die von der Raumspitze ausgeht und senkrecht nach unten hängt.

b) Die Stange mit der Lampe kann in eine Pendelbewegung versetzt werden. Diese Pendelbewegung verläuft im Modell in einer Ebene parallel zur x_2x_3-Ebene.
Wenn die Lampe zu stark schwingt, dann trifft sie die rechte Seitenwand. Der Auftreffpunkt wird im Modell durch den Punkt P beschrieben.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Im Rahmen einer Kunstausstellung wurde ein drei Meter langer Stab senkrecht zum Boden angebracht, der im Modell durch die Strecke $\overline{FG}$ mit $F(11|15|0)$ beschrieben wird.
Befindet sich die Lampe in der Position, die durch $L(9|9|7)$ beschrieben wird, so wirft der Stab einen Schatten, dessen Endpunkt auf der rechten Seitenwand durch G^* beschrieben wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G^*.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gesamtlänge des betrachteten Schattens berechnen kann.

Aufgabe B2

In einem Klassenzimmer befindet sich eine rechteckige Projektionsfläche. Ihre Eckpunkte werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte $A(0|4{,}4|1)$, $B(1|6{,}8|1)$, $C(1|6{,}8|2{,}6)$ und $D(0|4{,}4|2{,}6)$ dargestellt (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Klassenzimmerwand hinter der Projektionsfläche liegt in einer Ebene, die durch die x_2x_3-Ebene beschrieben wird.



a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen der Projektionsfläche.
Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen.
(Teilergebnis: $E\colon\ 12x_1 - 5x_2 = -22$)

b) Ein Schüler zielt mit einem Laserpointer auf die Projektionsfläche. Die Lichtquelle wird im Modell durch den Punkt $L(4|2|1)$ dargestellt, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Richtung des Laserstrahls.
Überprüfen Sie, ob der Laserstrahl die Projektionsfläche trifft.

Die Projektionsfläche ist so befestigt, dass sie sich um eine vertikale Achse drehen lässt. Im Modell lassen sich mögliche Lagen der Projektionsfläche durch Ebenen der Schar $E_a\colon\ 12x_1 + 5ax_2 = 28a + 6;\ \ a \in \mathbb{R}$ beschreiben.

c) Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ in jeder Ebene der Schar liegt.
Die Drehachse wird im Modell durch eine Strecke beschrieben. Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die diese Strecke enthält.

d) Begründen Sie, dass die Ebene E_1 eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt.