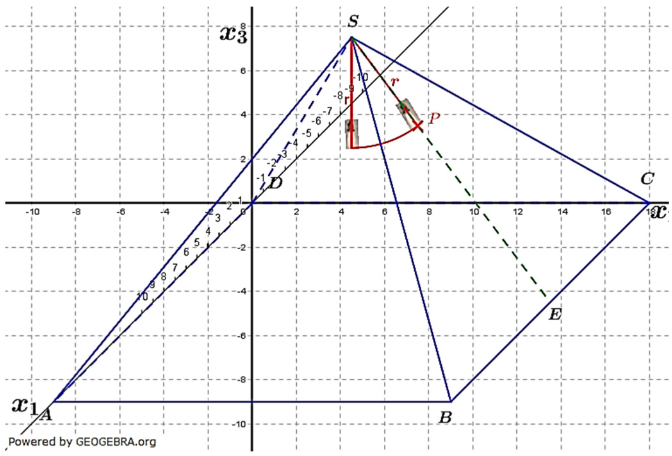
# Lösung B1

## Lösungslogik

a) *Winkel zwischen den beiden Kanten, der durch die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{BS}$ gebildet wird:*
Dies ist der Winkel zwischen zwei Vektoren, Berechnung über den $cos\,(\varphi)$.
*Koordinatengleichung von $E$ in der das Dreieck $BCS$ liegt:*
Wir bilden den Normalenvektor über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$. Über eine Punktprobe mit dem Punkt $B$ ermitteln wir den Parameter $d$ der Ebenengleichung.
*Flächeninhalt der Seitenwand:*
Berechnung über den halben Betrag des Kreuzproduktes aus $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$.

b) *Auftreffpunkt eines Punktes $P$ beim Pendeln einer Lampe:*
Die Grafik verdeutlicht die Situation. Die pendelnde Lampe bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius der Länge der Aufhängung $(5\,m)$. Da die Pendelbewegung parallel zur $x_2x_3$-Ebene erfolgt, wird die Lampe die rechte Seitenwand auf der Höhe der Seitenwand treffen. Wir benötigen somit die Parametergleichung einer Geraden durch die Punkte $S$ und $E$, wobei $E$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist.




Der Punkt $P$ liegt dann auf dieser Geraden im Abstand $r$ von $S$.

c) *Berechnung eines Schattenpunktes $G^*$:*
Ein Dreieck ist gleichschenklig wenn die Länge von zwei Seiten übereinstimmen und die dritte Seite nicht gleich lang ist.

*Beschreibung für Ermittlung der Gesamtlänge des Schattens:*
Siehe auch Grafik beim Klausuraufschrieb.

# Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2020

Klausuraufschrieb

a) *Winkel zwischen den beiden Kanten, der durch die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{BS}$ gebildet wird:*

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}$$

$$cos\ (\varphi)=\frac{\overrightarrow{BC}\circ\overrightarrow{BS}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BS}|}=\frac{\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}\right|}=\frac{162}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{306}}$$

$$\varphi=arccos\left(\frac{162}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{306}}\right)=59{,}04\,°$$

*Der Winkel zwischen den die Kante $\overline{BC}$ und $\overline{BS}$ beträgt $59\,°$.*

*Koordinatengleichung von $E$ in der das Dreieck $BCS$ liegt*

$$k\cdot\overrightarrow{n_e}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\216\\162\end{pmatrix}=54\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_e}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$4x_2+3x_3=d$$
$$4\cdot 18+3\cdot 0=d=72$$
$$4x_2+3x_3=72$$

*Flächeninhalt der Seitenwand:*

$$A_{BCS}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9\\-9\\12\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\216\\162\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{216^2+162^2}=135$$

*Der Flächeninhalt der Seitenwand beträgt $135\ m^2$.*

b) *Auftreffpunkt eines Punktes $P$ beim Pendeln einer Lampe:*

*Mittelpunkt $E$ der Strecke $\overline{BC}$:*

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}18\\36\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\18\\0\end{pmatrix}$$

Geradengleichung $g$ durch $S$ und $E$:

$$g:\quad \vec{x}=\overrightarrow{OS}+r\cdot\overrightarrow{SE}=\begin{pmatrix}9\\9\\12\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\9\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\12\end{pmatrix}+r^*\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{SE}\right|=\sqrt{9+16}=5$$

Die Länge des Pendels entspricht der Länge des Richtungsvektors. Der Punkt $P$ ist also genau $\left|\overrightarrow{SE}\right|$ vom Punkt $S$ entfernt:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SE}=\begin{pmatrix}9\\12\\8\end{pmatrix}$$

*Die Koordinaten des Auftreffpunktes sind $P(9\,|12|8)$.*

c) *Berechnung eines Schattenpunktes $G^*$:*

Koordinaten von $G$:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verlauf des Lichtstrahls $g$:

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LG} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 11-9 \\ 15-9 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Punkt  ist Schnittpunkt von $g$ mit $E$ (aus Teilaufgabe A):

$g \cap E$:

Aus $g$ folgt:

$x_1 = 9 + 2r; \quad x_2 = 9 + 6r; \quad x_3 = 7 - 4r$

$x_1; x_{2;} x_3 \rightarrow \quad E$

$4(9 + 6r) + 3(7 - 4r) = 72$

$36 + 24r + 21 - 12r = 72$

$12r = 15$

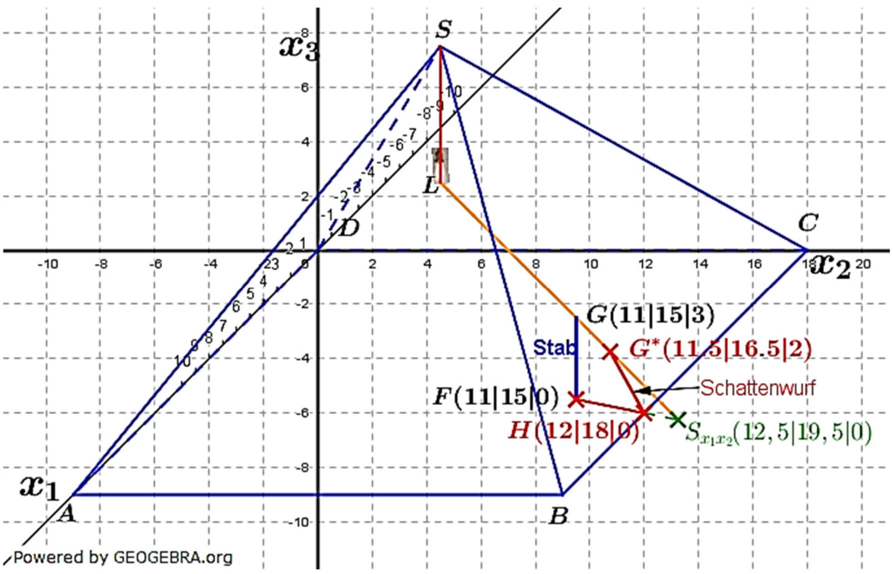
$r = \frac{5}{4}$

$$\overrightarrow{OG^*} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 16{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Der Schattenpunkt hat die Koordinaten $Q^*(11{,}5|16{,}5|2)$.*

*Beschreibung für Ermittlung der Gesamtlänge des Schattens:*

Die nachfolgende Grafik erläutert die Situation.




Bestimmung des Spurpunktes $S_{x_1x_2}$ der Gerade durch $L$ und $G$ mit der $x_1x_2$-Ebene. Gerade durch $F$ und $S_{x_1x_2}$ schneidet die Gerade durch $B$ und $C$ in $H$.

Der Schatten verläuft nun von $G^*$ über $H$ nach $F$, ist somit $l = |\overrightarrow{G^*H}| + |\overrightarrow{HF}|$.

## Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2020

*Berechnung (nicht Aufgabenstellung) für den mathematisch Interessierten:*
*Spurpunkt von $g$ mit der $x_1x_2$-Ebene:*

Aus $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r^* \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ folgt:

$7 - 4r = 0$

$r = \frac{7}{4}$

$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 19{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Gerade $h$ durch $F$ und $S_{x_1x_2}$:*

$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OF} + s \cdot \overrightarrow{FS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gerade $l$ durch die Punkte $B$ und $C$:

$l: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Berechnung Schnittpunkt $H$ zwischen $h$ und $l$:*

$h \cap l$

$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$s - t = 7$

$3s = 3$

$s = 1$

$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Berechnung $|\overrightarrow{G^*H}|$:*

$|\overrightarrow{G^*H}| = \left| \begin{pmatrix} 12 - 11{,}5 \\ 18 - 16{,}5 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0{,}25 + 6{,}25 + 4} = \sqrt{10{,}5} \approx 3{,}24$

*Berechnung $|\overrightarrow{G^*H}|$:*

$|\overrightarrow{FH}| = \left| \begin{pmatrix} 12 - 11 \\ 18 - 15 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

*Der Schatten ist etwa $3{,}24\,m + 3{,}16\,m = 6{,}4\,m$ lang.*

# Lösung B2

## Lösungslogik

a) *Länge der Diagonalen der Projektionsfläche*:
Die Diagonale der Projektionsfläche verläuft von $A$ nach $C$ bzw. von $B$ nach $D$.
$l = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.
*Koordinatengleichung von $E$:*
Wir bilden den Normalenvektor über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Über eine Punktprobe mit dem Punkt $A$ ermitteln wir den Parameter $d$ der Ebenengleichung.
*Winkel, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen:*
Es geht um den Schnittwinkel Ebene - Ebene, also über den $cos\ (\varphi)$.

b) In diesem Falle benötigen wir eine Parametergleichung der Ebene. Wir schneiden diese Parametergleichung mit der Geraden durch $L$ und dem Richtungsvektor $\vec{v}$. Ist $0 < s; t < 1$ ($s$ und $t$ sind die Skalierungsparameter der Ebene), so trifft der Laserstrahl die Projektionsfläche.

c) *Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ in jeder Ebene der Schar:*
Wir berechnen den Mittelpunkt der Strecke und machen damit eine Punktprobe mit der Ebenenschar.
*Gleichung der Geraden, die die Drehachse enthält:*
Da der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ in jeder Ebene der Schar liegt, liegt dieser Punkt auch auf der Drehachse und ist somit Aufpunkt der Geradengleichung.
Die Gerade verläuft senkrecht nach oben, hat also den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) *Begründung, dass die Ebene $E_1$ eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt:*
Siehe Klausuraufschrieb.

## Klausuraufschrieb

a) *Länge der Diagonalen der Projektionsfläche*:
$$l = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2{,}4^2 + 1{,}6^2} = 3{,}05$$
*Die Diagonale der Projektionsfläche hat etwa die Länge $3\ m$.*
*Koordinatengleichung von $E$:*
$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}84 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0{,}32 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$12x_1 - 5x_2 = d$
$12 \cdot 0 - 4 \cdot 4{,}4 = d = -22$
$E\colon\ 12x_1 - 5x_2 = -22$

## Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2020

*Winkel, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen:*
Schnittwinkel zwischen der Ebene $\mathrm{E}$ und der $x_2x_3$-Ebene.

$$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_2x_3}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_2x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}12\\-5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}12\\-5\\0\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{|12|}{\sqrt{12^2+5^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{12}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{12}{13}\right) = 22{,}62\,°$$

*Der Winkel, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen beträgt etwa $22{,}6\,°$.*

b) *Überprüfung, ob Laserstrahl auf Projektionsfläche trifft:*
Parametergleichung der Projektionsfläche:

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4{,}4\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2{,}4\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}6\end{pmatrix}$$

Parametergleichung des Lichtstrahle:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-5\\6\\2\end{pmatrix}$$

$E \cap g$:

$$s \cdot \begin{pmatrix}1\\2{,}4\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1{,}6\end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix}-5\\6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4{,}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2{,}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & s + 5r = 4 & |\ \cdot 6 \\ \text{(II)} & 2{,}4s - 6r = -2{,}4 & |\ \cdot 5 \\ \text{(III)} & 1{,}6t - 2r = 0 & \end{array}$$

$(\mathrm{I}) \cdot 6 + (II) \cdot 5$

$$18s = 12$$
$$s = \frac{2}{3}$$

$s \rightarrow (I)$

$$\text{(I)} \quad \frac{2}{3} + 5r = 4$$
$$5r = \frac{10}{3} \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$r \rightarrow (III)$

$$1{,}6t - 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$$
$$1{,}6t = \frac{4}{3}$$
$$t = \frac{5}{6}$$

*Wegen $0 < s; t < 1$ trifft der Laserstrahl die Projektionsfläche.*

c) *Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ in jeder Ebene der Schar:*
Mittelpunkt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\6{,}8\\2{,}6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4{,}4\\2{,}6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0{,}5\\5{,}6\\2{,}6\end{pmatrix}$$

Punktprobe in $E_a$ mit $M$:
$12 \cdot 0{,}5 + 5a \cdot 5{,}6 = 28a + 6$
$28a + 6 = 28a + 6$ ➔ wahre Aussage
*Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$ liegt in jeder Ebene der Schar.*

*Gleichung der Geraden, die die Drehachse enthält:*

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 5{,}6 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) *Begründung, dass die Ebene $E_1$ eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt:*

$E_1:\ 12x_1 + 5x_2 = 34$

Berechnung der Schnittgeraden zwischen $E_1$ und der $x_2x_3$-Ebene:

$E_1:\ 12x_1 + 5x_2 = 34$

$x_1x_2:\ x_1 \qquad = 0$

Wir wählen $x_3 = t$. $x_1 = 0;\quad 5x_2 = 34 \rightarrow\ x_2 = 6{,}8$

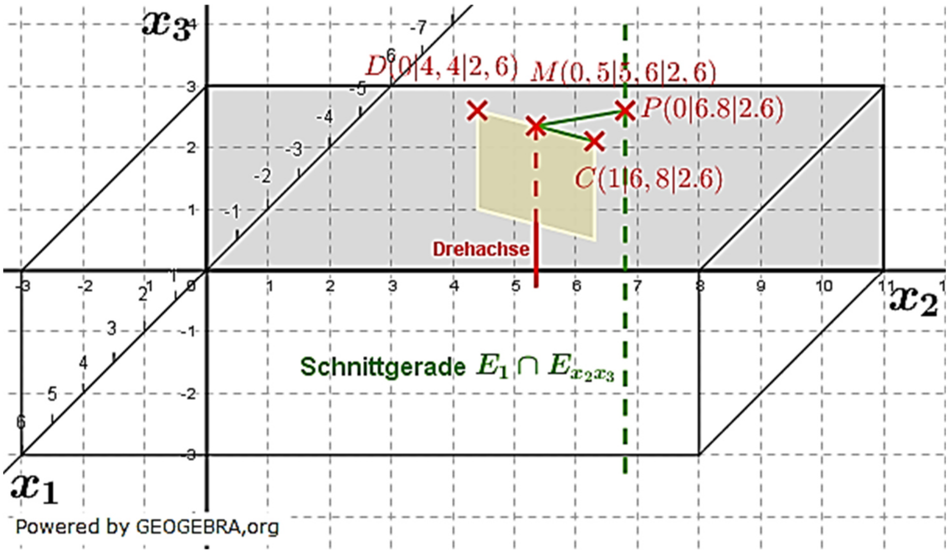
Der Lösungsvektor lautet:

$\mathbb{L} = \{x_1; x_2; x_3 | 0; 6{,}8; t\}$

Die Schnittgerade hat damit die Gleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation.




Die soeben errechnete Schnittgerade ist grün eingetragen. Die Projektionswand ist in Originalstellung eingetragen, sie kann sich in der Drehachse drehen, da $M$ in jeder Ebene $E_a$ liegt (siehe Aufgabenteil c)). Wenn die Projektionswand in die Ebene $E_1$ nach rechts gedreht wird und dann die hintere $x_2x_3$-Ebene berühren soll, so muss die Strecke $|\overrightarrow{MC}|$ gleich lang wie die Strecke $|\overrightarrow{MP}|$ sein.

<u>Hinweis:</u>

Dass die Projektionswand nicht nach links gedreht werden kann, ergibt sich aus dem Punkt $D$, dessen $x_1$-Koordinate bereits $0$ ist und der somit die hintere $x_2x_3$-Ebene bereits berührt.

$$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-0{,}5 \\ 6{,}8-5{,}6 \\ 2{,}6-2{,}6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5^2+1{,}2^2} = 1{,}3$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-0{,}5 \\ 6{,}8-5{,}6 \\ 2{,}6-2{,}6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5^2+1{,}2^2} = 1{,}3$$

*Wegen* $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MP}\right|$ *berührt die Projektionswand die* $x_2x_3$*-Ebene, wenn sie in die Ebene* $E_1$ *gedreht wird.*