



Aufgabe M01B1

Ein rechteckiger Spiegel hat die Eckpunkte $A(2|0|0)$, $B(-2|4|0)$, $C(-2|4|4)$ und $D(2|0|4)$. Er lässt sich um die Strecke PQ durch die Punkte $P(0|2|0)$ und $Q(0|2|4)$ drehen.

Weiterhin ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_t durch die Gleichung $E_t: x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben. Für jedes t wird durch die Ebene E_t eine mögliche Lage des Spiegels dargestellt.

- a) Zeichnen Sie den Spiegel und die Strecke PQ in ein Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass der Spiegel in der Ebene E_1 liegt. Zeichnen Sie die Ebene E_3 ein. Der Spiegel dreht sich nun so, dass er in der Ebene E_3 liegt. Berechnen Sie, um wie viel Grad er sich dabei gedreht hat. Beschreiben Sie, wie sich die Stellung des Spiegels in Abhängigkeit von t ändert. Bestimmen Sie, welche Stellung des Spiegels durch keine Ebene E_t dargestellt wird.
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Spiegels, wenn der Spiegel in der Ebene E_3 liegt und zeichnen Sie den Spiegel für diese Lage ein.
- c) Im Punkt $L(6|8|1)$ befindet sich eine Lichtquelle, welche einen Lichtstrahl in Richtung $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussendet. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Spiegel unabhängig von dessen Stellung immer im gleichen Punkt trifft.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 01

Lösung M01B1

a) *Spiegel in E_1 :*

Spurpunkte von E_1 :

$$S_{1x_1}(2|0|0); S_{1x_2}(0|2|0)$$

$E_1 \parallel x_3$ -Achse.

Die Spurpunkte von E_1 fallen mit den Punkten A und P zusammen. Auch der Spiegel ist parallel zur x_3 -Achse. Somit liegt der Spiegel in E_1 .

Drehung des Spiegels:

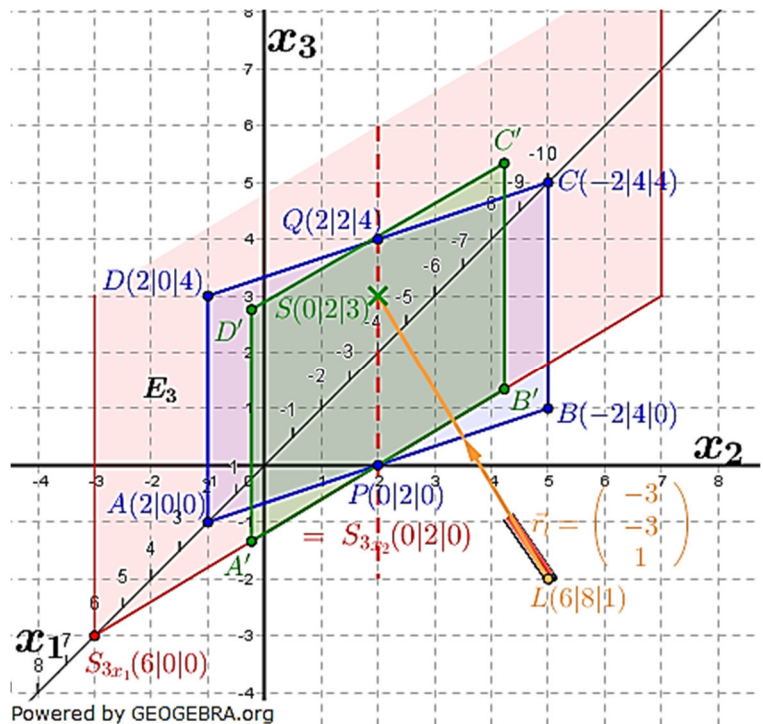
Der Drehwinkel entspricht dem Schnittwinkel zwischen E_1 und E_3 .

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1+3}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right) = 26,565^\circ$$

Der Spiegel hat sich ca. 26



Lage in Abhängigkeit von t :

Alle Ebenen E_t und auch der Spiegel selbst liegen parallel zur x_3 -Achse.

Mit größer werdendem t dreht sich der Spiegel im Uhrzeigersinn. Es gibt eine Stellung parallel zur x_1x_3 -Ebene, nämlich dann, wenn der Spiegel in der Ebene F : $x_2 = 2$ liegt. Da in dieser Ebene die x_1 -Koordinate fehlt, ist diese Ebene keine Ebene der Ebenenschar E_t .

b) *Eckpunkte des Spiegels in der Ebene E_3 :*

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{8}$$

Richtungsvektor $\vec{rv}_3$:

$$\overrightarrow{S_{3x_1}S_{3x_2}} = \vec{rv}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{rv}_{3_0} = \frac{1}{\sqrt{40}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{40}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,68 \\ 1,11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OP} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{40}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,68 \\ 2,89 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A'(2,68|1,11|0); B'(-2,68|2,89|0); A'(2,68|1,11|4); D'(-2,58|2,89|4)$$

Zeichnung siehe Teilaufgabe a).

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 01

- c) Wir schneiden die Gerade des Lichtstrahls mit der Ebene E_t .
 Gerade des Lichtstrahls:

$$l: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \vec{rl} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$x_1 = 6 - 3r; \quad x_2 = 8 - 3r; \quad x_3 = 1 + r$$

$l \cap E_t$:

$$6 - 3r + t \cdot (8 - 3r) = 2t$$

$$6 - 3r + 8t - 3rt = 2t$$

$$-3r - 3rt = -6t - 6$$

$$r(3 + 3t) = 6 + 6t$$

$$r = \frac{6+6t}{3+3t} \Rightarrow r = 2 \text{ für } t \neq -1$$

(Aus $3r + 3rt = 6t + 6$ ergibt sich für $t = -1$ die Lösung $0 = 0$, also liegt für die Gerade in der Ebene).

Der Schnittpunkt ist somit mit $r = 2$ unabhängig von t und ergibt sich zu:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Der Punkt $S(0|2|3)$ liegt auf der Drehachse).