



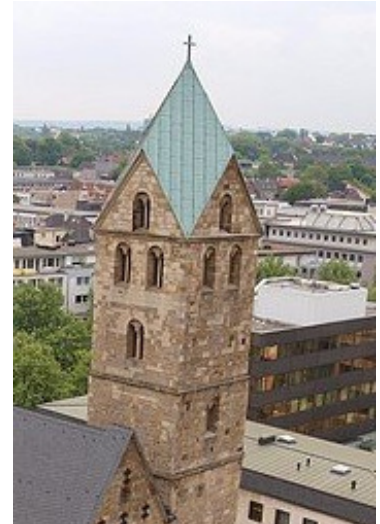
Aufgabe M02B1

Die Turmspitze der Marienkirche in Dortmund hat eine quadratische Grundfläche $ABCD$ (die Seitenlänge werde mit 8 m angenommen), auf der vier senkrecht gemauerte gleichseitige Dreiecke stehen; die vierteiligen Dachflächen der Turmspitze sind rautenförmig.

Ein lokales Koordinatensystem ist so festgelegt, dass die Straßenebene durch $z = 0$ bestimmt ist und die Ecken A, B, C, D folgende Koordinaten haben:

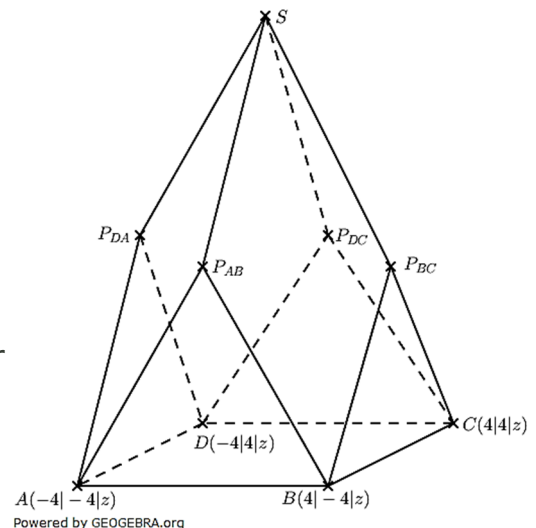
$A(-4| -4|z), B(+4| -4|z), C(+4| +4|z)$ und $D(-4| +4|z)$ mit $z > 0$.

Die Turmspitze liegt $42,50\text{ m}$ über dem Straßenniveau.



- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der oberen Eckpunkte $P_{AB}, P_{BC}, P_{CD}, P_{DA}$ der gleichseitigen Dreiecke zunächst in Abhängigkeit von z sowie die Koordinaten der Turmspitze S (auf der das Kreuz steht). Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche auch numerisch an. (Angaben mit zwei Dezimalstellen).
(Kontrollergesult: $z = 28,64$)

- b) Bestimmen Sie die Gleichung für die Dachfläche, die den Punkt A enthält, in Parameterform.
- c) Das Kreuz auf der Turmspitze soll durch vier Laserstrahler so beleuchtet werden, dass der Strahl genau über die zum Kreuz führenden Dachkanten führt und diese zusätzlich beleuchtet. Die Laserstrahler sollen ebenerdig montiert werden.



- Berechnen Sie, in welcher Entfernung von der Turmmitte die Strahler zu montieren sind, und bestimmen Sie den Winkel α , den die Strahlen gegenüber dem Straßenniveau haben. Führen Sie Ihre Untersuchungen für *einen* der vier Laserstrahler durch.

- d) Berechnen Sie die Innenwinkel β und γ der Rauten und die Neigung δ der rautenförmigen Dachflächen gegenüber dem Grundniveau.
- e) Bestimmen Sie das Volumen des Dachraums der Turmspitze oberhalb des Quadrats $ABCD$ (die Dicke der Mauern und des Dachs werden vernachlässigt).
- f) Die Statik der Dachkonstruktion soll durch Stützbalken verstärkt werden. Diese verbinden die Mitten der Rauten mit dem jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt des Grundquadrats $ABCD$. Bestimmen Sie die Länge dieser Balken (die sich im Innern der Kirchturmspitze gegenseitig durchdringen) sowie deren Neigungswinkel ϵ mithilfe der Methoden der Vektorgeometrie.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02
Lösung M02B1

a) *Koordinaten der oberen Eckpunkte P_{AB} , P_{BC} , P_{CD} , P_{DA} :*

Bestimmung der x_3 -Koordinate der Punkte:

Das Dreieck z. B. ABP_{AB} ist gleichseitig mit einer Seitenlänge von 8 m. Die x_3 -Koordinate entspricht der Höhe h_{AB} dieses Dreiecks zuzüglich z.

$$h_{AB} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \quad | \quad \text{siehe Merkhilfe}$$

$$h_{AB} = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,93$$

Die x_1x_2 -Koordinaten der Punkte entsprechen jeweils den Mitten der Seitenkanten der quadratischen Grundfläche:

$$P_{AB_0} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (0|-4|z)$$

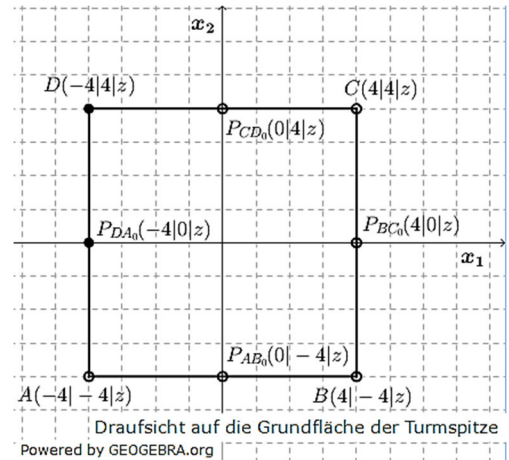
$$P_{CD_0} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = (0|4|z)$$

$$P_{BC_0} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (4|0|z)$$

$$P_{DA_0} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = (-4|0|z)$$

Daraus folgt:

$$P_{AB}(0|-4|z + 6,93); P_{BC}(4|0|z + 6,93); P_{CD}(0|4|z + 6,93); P_{DA}(-4|0|z + 6,93)$$



Koordinaten der Turmspitze S:

Die Turmspitze steht senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} in einer Höhe $x_3 = 42,5$.

$$M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = (0|0|z) \Rightarrow S(0|0|42,5)$$

Berechnung von z:

Wir betrachten jetzt die Situation der Turmspitze. Deren Höhe sei h , zur Ermittlung dieser Höhe betrachten wir die Turmspitze ebenerdig, also $z = 0$. Dann ist die Turmspitze der Schnittpunkt der Geraden, auf der die Höhe liegt mit einer der Ebenen in der die rautenförmigen Seitenflächen liegen, wir nehmen hier die Ebene durch die Punkte $P_{DA_0}(-4|0|6,93)$, $P_{AB_0}(0|-4|6,93)$ und $A(-4|-4|0)$.

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{AP_{DA}} \times \overrightarrow{AP_{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6,93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,72 \\ 27,72 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$E_{P_{AB}P_{BC}B}: 27,72x_1 + 27,72x_2 - 16x_3 = d$$

$$27,72 \cdot (-4) + 27,72 \cdot (-4) - 16 \cdot 0 = d$$

$$-221,76 = d$$

$$E_{P_{AB}P_{BC}B}: 27,72x_1 + 27,72x_2 - 16x_3 = -221,76$$

Gerade durch S, auf der die Höhe liegt (Aufpunkt ist der Ursprung):

$$g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{P_{AB}P_{BC}B} \cap g$$

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = r$$

$$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E_{P_{AB}P_{BC}B}$$

$$-16 \cdot 1 = -221,76 \Rightarrow 13,86$$

Die Turmspitze ist 13,86 m hoch.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02

$$z = 42,50 - 13,86 = 28,64$$

Numerische Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche:

$$A(-4|-4|28,64); B(4|-4|28,64); C(4|4|28,64); D(-4|4|28,64)$$

- b) *Parameterform der Ebene, in der die Dachfläche liegt, die den Punkt A enthält:*

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AP_{DA}} + s \cdot \overrightarrow{AP_{AB}}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 28,64 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6,93 \end{pmatrix}$$

- c) *Entfernung von Strahlern zur Turmmitte und Winkel:*

Gesucht ist zunächst der Schnittpunkt B der Geraden g durch z. B. die Punkte S und P_{AB} mit der Ebene E , die den Boden beschreibt.

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP_{AB}} + t \cdot \overrightarrow{P_{AB}S}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 35,57 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - (-4) \\ 42,5 - 35,57 \end{pmatrix}$$

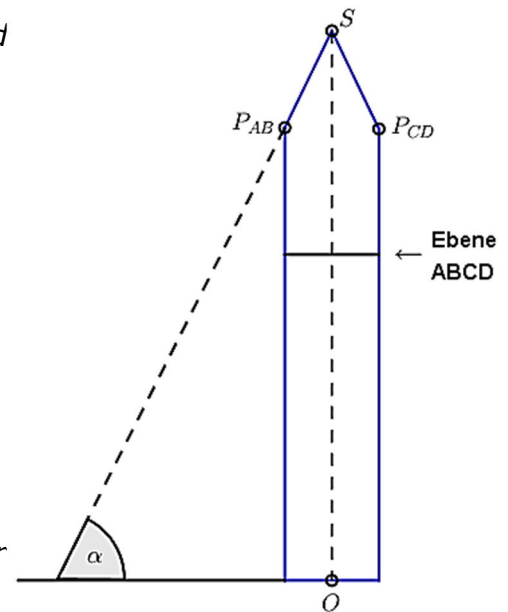
$$E: x_3 = 0$$

$$g \cap E:$$

$$35,57 + 6,93t = 0 \Rightarrow r = -5,133$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 35,57 \end{pmatrix} - 5,133 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24,53 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Laserstrahl müsste etwa 24,5 m von der Turmmitte entfernt montiert werden.



Powered by GEOGEBRA.org

Schnittwinkel α des Laserstrahls:

Dies ist der Winkel, den die Gerade g mit der Ebene E bildet.

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{v_g}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{v_g}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|6,93|}{1 \cdot \sqrt{4^2 + 6,93^2}} = 0,8661$$

$$\alpha = \arcsin(0,8661) \approx 60^\circ$$

Der Anstellwinkel des Laserstrahls beträgt 60° .

- d) *Innenwinkel β und γ der Rauten und die Neigung δ .*

β : Dies ist der Winkel zwischen z. B. den Vektoren $\overrightarrow{AP_{DA}}$ und $\overrightarrow{AP_{AB}}$.

$$\cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{AP_{DA}} \circ \overrightarrow{AP_{AB}}|}{|\overrightarrow{AP_{DA}}| \cdot |\overrightarrow{AP_{AB}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 - (-4) \\ 0 - (-4) \\ 35,57 - 28,64 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 - (-4) \\ -4 - (-4) \\ -28,64 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6,93 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6,93 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|6,93^2|}{\sqrt{4^2 + 6,93^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6,93^2}} = 0,75$$

$$\beta = \arccos(0,75) \approx 41,4^\circ$$

γ : Der zweite Innenwinkel einer Raute ergänzt den ersten Innenwinkel zu 180° .

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 41,4^\circ = 138,6^\circ$$

δ : Dies ist der Winkel zwischen z. B. dem Vektor \overrightarrow{AS} und dem Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche $ABCD$ liegt.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02

$$\sin(\delta) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{AS}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{AS}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 13,86 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 13,86 \end{pmatrix} \right|} = \frac{13,86}{1 \cdot \sqrt{2 \cdot 4^2 + 13,86^2}} = 0,9259$$

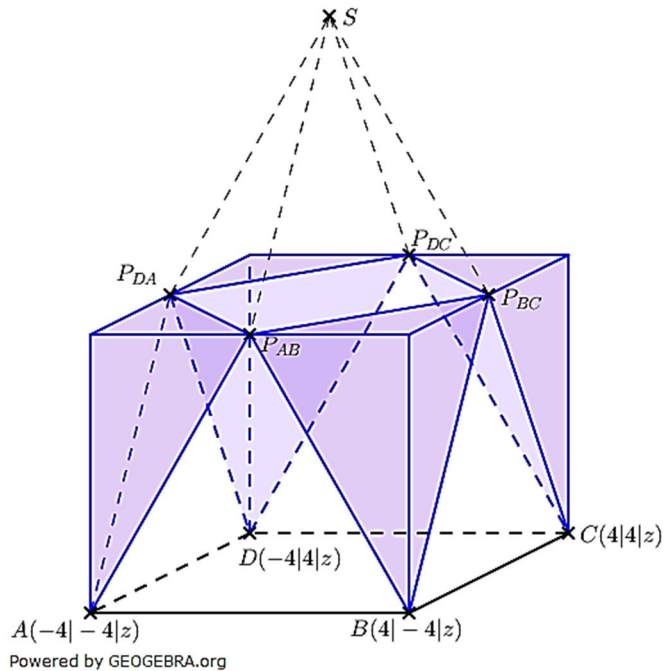
$$\delta = \arcsin(0,9259) \approx 67,8^\circ$$

Der Neigungswinkel der rautenförmigen Dachfläche beträgt $67,8^\circ$.

e) **Volumen der Turmspitze:**

Wir betrachten das Volumen getrennt. Der obere Teil V_1 ist eine quadratische Pyramide mit der Grundfläche $P_{AB}P_{BC}P_{DC}P_{DA}$ mit der Seitenlänge $4 \cdot \sqrt{2}$ und der Höhe $h = 6,93$ (siehe Aufgabenteil a)).

Der untere Teil ist das Volumen eines quadratischen Quaders mit der Seitenkante $a = 8$ und der Höhe $c = 6,93$, von dem wir die vier seitlichen Dreieckspyramiden abziehen müssen mit der Grundfläche eines rechtwinkligen Dreiecks von $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ und der Höhe $c = 6,93$.



Länge der Seitenkante $P_{AB}P_{BC}$:

$$P_{AB}P_{BC} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Volumen der Pyramide mit der Grundfläche $P_{AB}P_{BC}P_{DC}P_{DA}$:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot \sqrt{2})^2 \cdot 6,93 = 73,92$$

Volumen des Quaders mit der Grundfläche $ABCD$:

$$V_{\text{Quader}} = 8 \cdot 8 \cdot 6,93 = 443,52$$

Volumen einer seitlichen Dreieckspyramide:

$$V_{\text{seitlich}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6,93 = 18,48$$

$$V_2 = V_{\text{Quader}} - 4 \cdot V_{\text{seitlich}} = 443,52 - 4 \cdot 18,48 = 369,6$$

$$V_{\text{Turmspitze}} = V_1 + V_2 = 73,92 + 369,6 = 443,52$$

Das Volumen der Turmspitze beträgt etwa $443,5 \text{ m}^3$.

f) **Länge von Balken sowie deren Neigungswinkel ϵ :**

Länge Balken l_{Balken} :

Mittelpunkt der Raute der Dachfläche M :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OS}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 + 0 \\ -4 + 0 \\ 28,64 + 42,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 35,57 \end{pmatrix}$$

Der Balken verbindet den Punkt M mit dem Punkt C .

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02

$$l_{\text{Balken}} = |\overrightarrow{MC}| = \left| \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 4 - (-2) \\ 28,64 - 35,57 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6,93 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 36 + 6,93^2} \approx 10,96$$

Der Balken ist etwa 11 m lang.

Neigungswinkel ϵ :

Dies ist der Winkel, den die Vektoren \overrightarrow{MC} und \overrightarrow{CA} einschließen.

$$\cos(\epsilon) = \frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6,93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4-4 \\ -4-4 \\ 28,64-28,64 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6,93 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-48-48|}{\sqrt{72+6,93^2} \cdot \sqrt{128}} = 0,7745$$

$$\epsilon = \arccos(0,7745) \approx 39,24^\circ$$

Der Neigungswinkel ϵ beträgt etwa $39,2^\circ$.