Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02

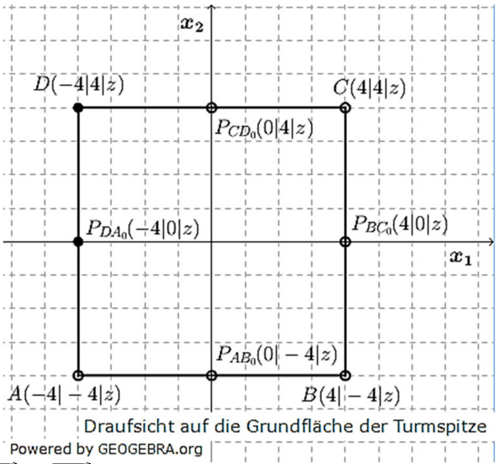
Lösung M02B1

a) *Koordinaten der oberen Eckpunkte P_{AB}, P_{BC}, P_{CD}, P_{DA}:*

Bestimmung der x_3-Koordinate der Punkte:
Das Dreieck z. B. ABP_{AB} ist gleichseitig mit einer Seitenlänge von $8\,m$. Die x_3-Koordinate entspricht der Höhe h_{AB} dieses Dreiecks zuzüglich z.

$h_{AB} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ | siehe Merkhilfe

$h_{AB} = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6{,}93$



Draufsicht auf die Grundfläche der Turmspitze

Die x_1x_2-Koordinaten der Punkte entsprechen jeweils den Mitten der Seitenkanten der quadratischen Grundfläche:

$P_{AB_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = (0|-4|z)$

$P_{CD_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = (0|4|z)$

$P_{BC_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = (4|0|z)$ $\qquad P_{DA_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right) = (-4|0|z)$

Daraus folgt:
$P_{AB}(0|-4|z + 6{,}93)$; $P_{BC}(4|0|z + 6{,}93)$; $P_{CD}(0|4|z + 6{,}93)$; $P_{DA}(-4|0|z + 6{,}93)$

Koordinaten der Turmspitze S:

Die Turmspitze steht senkrecht über dem Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in einer Höhe $x_3 = 42{,}5$.

$M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = (0|0|z) \Rightarrow S(0|0|42{,}5)$

Berechnung von z:

Wir betrachten jetzt die Situation der Turmspitze. Deren Höhe sei h, zur Ermittlung dieser Höhe betrachten wir die Turmspitze ebenerdig, also $z = 0$. Dann ist die Turmspitze der Schnittpunkt der Geraden, auf der die Höhe liegt mit eine der Ebenen in der die rautenförmigen Seitenflächen liegen, wir nehmen hier die Ebene durch die Punkte $P_{DA_0}(-4|0|6{,}93), P_{AB_0}(0|-4|6{,}93)$ und $A(-4|-4|0)$.

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AP_{DA}} \times \overrightarrow{AP_{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6{,}93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27{,}72 \\ 27{,}72 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$E_{P_{AB}P_{BC}B}: 27{,}72x_1 + 27{,}72x_2 - 16x_3 = d$
$27{,}72 \cdot (-4) + 27{,}72 \cdot (-4) - 16 \cdot 0 = d$
$-221{,}76 = d$

$E_{P_{AB}P_{BC}B}: 27{,}72x_1 + 27{,}72x_2 - 16x_3 = -221{,}76$

Gerade durch S, auf der die Höhe liegt (Aufpunkt ist der Ursprung):

$$g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_{P_{AB}P_{BC}B} \cap g$
$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = r$
$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E_{P_{AB}P_{BC}B}$
$-16 \cdot 1 = -221{,}76 \quad \Rightarrow \quad 13{,}86$

Die Turmspitze ist $13{,}86\,m$ hoch.

$z = 42{,}50 - 13{,}86 = 28{,}64$

Numerische Koordinaten der Eckpunkte der Grundfläche:

$A(-4|-4|28{,}64)$; $B(4|-4|28{,}64)$; $C(4|4|28{,}64)$; $D(-4|4|28{,}64)$

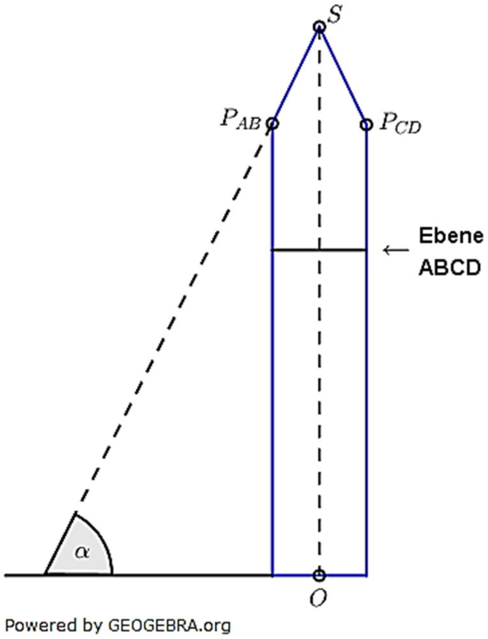
b) *Parameterform der Ebene, in der die Dachfläche liegt, die den Punkt A enthält:*

$$E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AP_{DA}} + s \cdot \overrightarrow{AP_{AB}}$$

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 28{,}64 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6{,}93 \end{pmatrix}$$

c) *Entfernung von Strahlern zur Turmmitte und Winkel:*

Gesucht ist zunächst der Schnittpunkt B der Geraden g durch z. B. die Punkte S und P_{AB} mit der Ebene , die den Boden beschreibt.



$$g\colon\quad \vec{x} = \overrightarrow{OP_{AB}} + t \cdot \overrightarrow{P_{AB}S}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 35{,}57 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-(-4) \\ 42{,}5-35{,}57 \end{pmatrix}$$

$$E\colon\quad x_3 = 0$$

$g \cap E$:

$35{,}57 + 6{,}93t = 0 \quad => \quad r = -5{,}133$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 35{,}57 \end{pmatrix} - 5{,}133 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24{,}53 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Laserstrahle müsste etwa $24{,}5\,m$ von der Turmmitte entfernt montiert werden.

Schnittwinkel α des Laserstrahls:

Dies ist der Winkel, den die Gerade g mit der Ebene E bildet.

$$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv_g}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|6{,}93|}{1 \cdot \sqrt{4^2 + 6{,}93^2}} = 0{,}8661$$

$\alpha = arcsin(0{,}8661) \approx 60\,°$

Der Anstellwinkel des Laserstrahls beträgt $60\,°$.

d) *Innenwinkel β und γ der Rauten und die Neigung δ.*

β: Dies ist der Winkel zwischen z. B. den Vektoren $\overrightarrow{AP_{DA}}$ und $\overrightarrow{AP_{AB}}$.

$$cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{AP_{DA}} \circ \overrightarrow{AP_{AB}}|}{|\overrightarrow{AP_{DA}}| \cdot |\overrightarrow{AP_{AB}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4-(-4) \\ 0-(-4) \\ 35{,}57-28{,}64 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -4-(-4) \\ -28{,}64 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6{,}93 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6{,}93 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|6{,}93^2|}{\sqrt{4^2+6{,}93^2} \cdot \sqrt{4^2+6{,}93^2}} = 0{,}75$$

$\beta = arccos(0{,}75) \approx 41{,}4°$

γ: Der zweite Innenwinkel einer Raute ergänzt den ersten Innenwinkel zu $180\,°$.

$\gamma = 180\,° - \beta = 180\,° - 41{,}4\,° = 138{,}6\,°$

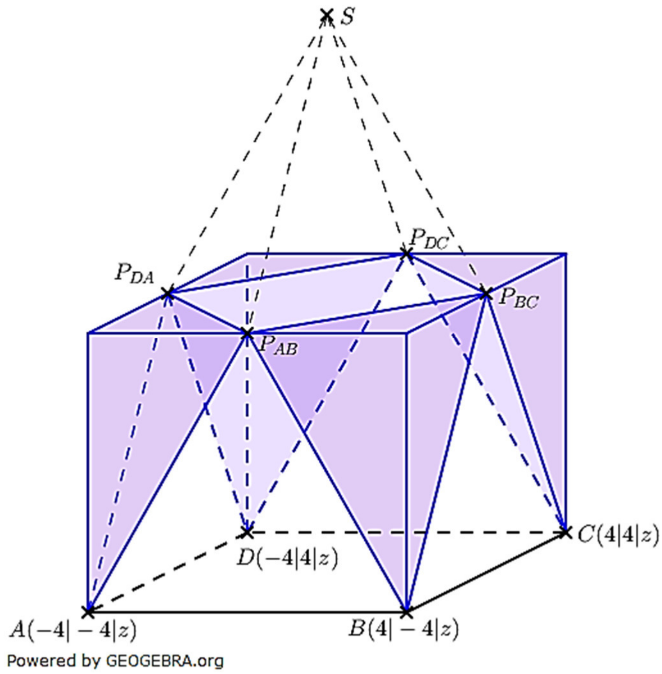
δ: Dies ist der Winkel zwischen z. B. dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ und dem Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche $ABCD$ liegt.

$sin(\delta) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{AS}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{AS}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\4\\13{,}86\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}4\\4\\13{,}86\end{pmatrix}\right|} = \frac{13{,}86}{1 \cdot \sqrt{2 \cdot 4^2 + 13{,}86^2}} = 0{,}9259$

$\delta = arcsin(0{,}9259) \approx 67{,}8\,°$

Der Neigungswinkel der rautenförmigen Dachfläche beträgt $67{,}8\,°$*.*

e) *Volumen der Turmspitze:*
Wir betrachten das Volumen getrennt. Der obere Teil V_1 ist eine quadratische Pyramide mit der Grundfläche $P_{AB}P_{BC}P_{DC}P_{DA}$ mit der Seitenlänge $4 \cdot \sqrt{2}$ und der Höhe $h = 6{,}93$ (siehe Aufgabenteil a)).
Der untere Teil ist das Volumen eines quadratischen Quaders mit der Seitenkante $a = 8$ und der Höhe $c = 6{,}93$, von dem wir die vier seitlichen Dreieckspyramiden abziehen müssen mit der Grundfläche eines rechtwinkligen Dreiecks von $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ und der Höhe $c = 6{,}93$.



Länge der Seitenkante $P_{AB}P_{BC}$*:*

$P_{AB}P_{BC} = 4 \cdot \sqrt{2}$

Volumen der Pyramide mit der Grundfläche $P_{AB}P_{BC}P_{DC}P_{DA}$*:*

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot 6{,}93 = 73{,}92$

Volumen des Quaders mit der Grundfläche $ABCD$*:*

$V_{Quader} = 8 \cdot 8 \cdot 6{,}93 = 443{,}52$

Volumen einer seitlichen Dreieckspyramide:

$V_{seitlich} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6{,}93 = 18{,}48$

$V_2 = V_{Quader} - 4 \cdot V_{seitlich} = 443{,}52 - 4 \cdot 18{,}48 = 369{,}6$

$V_{Turmspitze} = V_1 + V_2 = 73{,}92 + 369{,}6 = 443{,}52$

Das Volumen der Turmspitze beträgt etwa $443{,}5\,m^3$*.*

f) *Länge von Balken sowie deren Neigungswinkel* ϵ*:*
Länge Balken l_{Balken}:
Mittelpunkt der Raute der Dachfläche M:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4+0\\-4+0\\28{,}64+42{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\35{,}57\end{pmatrix}$

Der Balken verbindet den Punkt M mit dem Punkt C.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 02

$l_{Balken} = |\overrightarrow{MC}| = \left|\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 4-(-2) \\ 28{,}64-35{,}57 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6{,}93 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+36+6{,}93^2} \approx 10{,}96$

Der Balken ist etwa $11\ m$ *lang.*

Neigungswinkel ϵ*:*

Dies ist der Winkel, den die Vektoren $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{CA}$ einschließen.

$cos(\epsilon) = \frac{|\overrightarrow{MC} \circ \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6{,}93 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4-4 \\ -4-4 \\ 28{,}64-28{,}64 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6{,}93 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-48-48|}{\sqrt{72+6{,}93^2} \cdot \sqrt{128}} = 0{,}7745$

$\epsilon = arccos(0{,}7745) \approx 39{,}24°$

Der Neigungswinkel ϵ *beträgt etwa* $39{,}2\,°$*.*