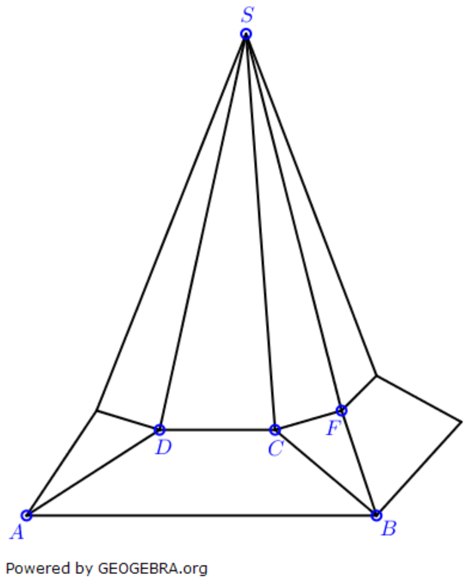
Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 03

Aufgabe M03B1

Das skizzierte Kirchturmdach hat eine quadratische Grundfläche.
Die Vorderseite ist festgelegt durch die Punkte $A(3|3|0)$, $B(3|9|0)$, $C(2|1|2)$, $D(2|-1|2)$ sowie $S(0|0|12)$.
Ein weiterer Punkt des Daches ist $F(1|2|2)$ ($1\,LE \triangleq 1\,m$).
Die Punkte A, B, C, D liegen in der Ebene E_1; die Punkte C, D, S in der Ebene E_2.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



a) Geben Sie die Koordinatendarstellungen der Ebenen E_1 und E_2 an.
Berechnen Sie das Maß des Winkels unter dem sich die Ebenen E_1 und E_2 schneiden.
Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel des Dreiecks DCS.

b) Das Kirchturmdach soll neu gedeckt werden. Der Materialpreis für die Neueindeckung beträgt $53\,€$ pro m^2 zuzüglich Mehrwertsteuer ($19\,\%$).
Berechnen Sie den Materialpreis (incl. MwSt.) für die Eindeckung des gesamten Dachs.

c) Die Dachkante CS soll durch einen im Punkt $R(0|0|2)$ gelagerten Balken abgestützt werden. Dabei soll der Balken senkrecht auf der Dachkante CS stehen.
Bestimmen Sie den Punkt, in dem der Balken die Dachkante CS berührt.
Berechnen Sie die Länge des Balkens.

d) Im Punkt $R(0|0|2)$ ist weiterhin eine $4\,m$ lange Fahnenstange verankert, die senkrecht auf der Ebene E_2: $5x_1 + x_3 = 12$ steht.
Ist diese Stange als Fahnenstange zu verwenden, wenn sie zur Aufhängung der Fahne mindestens $2\,m$ ins Freie ragen muss?

e) Das Kirchturmdach ruht auf einem quaderförmig gemauerten Turm mit der Höhe $18\,m$. Die Kirchturmspitze befindet sich also $30\,m$ über dem als eben angenommenen Erdboden.
Paralleles Sonnenlicht fällt auf den Kirchturm in Richtung des Vektors
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Schattenpunkt von S auf dem Erdboden und dem lotrecht unter dem Punkt A auf dem Erdboden liegenden Eckpunkt des Turms.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 03

Lösung M03B1

a) *Koordinatengleichung von Ebenen:*

E_1:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_1}} = (\overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{AD}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + x_3 = d$
$2 \cdot 3 + 0 = 6 = d$
$E_1\colon\ 2x_1 + x_3 = 6$

E_2:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = (\overrightarrow{DC}) \times (\overrightarrow{DS}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$5x_1 + x_3 = d$
$5 \cdot 2 + 2 = 12 = d$
$E_2\colon\ 5x_1 + x_3 = 12$

Schnittwinkel von E_1 und E_2:

$$cos(\phi) = \frac{|\overrightarrow{n_{E_1}} \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|10+1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}}$$

$\phi = arccos\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) \approx 15{,}255$

Der Schnittwinkel von E_1 und E_2 beträgt ca. $15{,}3\,°$

Größe der Innenwinkel des Dreiecks DCS:

Das Dreieck DCS ist ein gleichschenkliges Dreieck, somit $\alpha = \beta$ und $\gamma = 180 - 2 \cdot \alpha$.

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DS}|}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DS}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{105}} = \frac{2}{\sqrt{420}}$$

$\alpha = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{420}}\right) \approx 84{,}39\,°;\quad \beta \approx 84{,}39\,°;\quad \gamma \approx 11{,}2\,°$

Die Innenwinkel des Dreiecks DCS betragen $\alpha = \beta = 84{,}4°$ und $\gamma = 11{,}2°$.

b) *Kosten der Dachbedeckung:*

Gesamtfläche Dach:

Das Dach setzt sich zusammen aus jeweils viermal dem Trapez $ABCD$ sowie den Dreiecken CFB, DCS sowie CFS.

Trapez $ABCD$:

$A_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h$ mit $h = \sqrt{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - \left(\frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}\right)^2}$

$\overline{AB} = 6;\ \overline{CD} = 2;\ \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$

$h = \sqrt{21 - \left(\frac{6-2}{2}\right)^2} = \sqrt{17}$

$A_{ABCD} = \frac{6+2}{2} \cdot \sqrt{17} = 4 \cdot \sqrt{17}$

$$A_{CFB} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17}$$

$$A_{CFS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{CS}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{209}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 03

$A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DS}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{416}$

$A_{Dach} = 4 \cdot (A_{ABCD} + A_{CFB} + A_{CFS} + A_{DCS}) = 4 \cdot \left(4 \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{209} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{416}\right)$

$A_{Dach} \approx 143{,}92$

$K_{Dach} = A_{Dach} \cdot 53 \cdot 1{,}19 = 143{,}92 \cdot 53 \cdot 1{,}19 = 9077{,}14$

Die Kosten der Dachbedeckung belaufen sich auf brutto € 9.077,14.

c) *Befestigungspunkt P für einen Balken:*

Der Befestigungspunkt auf der Dachkante CS ist der Schnittpunkt einer Hilfsebene H durch R mit dem Richtungsvektor der Geraden g durch C und S als Normalenvektor und der Geraden g selbst.

$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$H: \quad -2x_1 - x_2 + 10x_3 = d$

$\qquad -2 \cdot 0 - 0 + 10 \cdot 2 = d \quad => \quad d = 20$

$H: \quad -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 20$

$g \cap H$:

$x_1 = 2 - 2r; \;\; x_2 = 1 - r; \;\; x_3 = 2 + 10r$

$-2(2 - 2r) - (1 - r) + 10(2 + 10r) = 20$

$-4 + 4r - 1 + r + 20 + 100r = 20$

$105r = 5 \;\; => \;\; r = \frac{1}{21}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{21} \\ \frac{20}{21} \\ \frac{52}{21} \end{pmatrix}$

Der Befestigungspunkt hat die Koordinaten $P\left(\frac{40}{21}\middle|\frac{20}{21}\middle|\frac{52}{21}\right)$.

d) *Mindestens $2\,m$ ins Freie ragende Fahnenstange:*

Bestimmung des Abstandes d von R zur Ebene E_2 (über die HNF) ergibt Länge der Fahnenstange im Inneren des Turms Die Länge, die ins Freie ragt, errechnet sich dann aus $l = 4 - d$.

HNF:

$\frac{5x_1 + x_3 - 12}{\sqrt{5^2 + 1}} = 0$

$d(E_2; R) = \frac{|5 \cdot 0 + 2 - 12|}{\sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{26}} \approx 1{,}96$

$l = 4 - d = 4 - 1{,}96 = 2{,}04$

Die Fahnenstange kann zur Aufhängung einer Fahne verwendet werden.

e) *Abstand $\overline{A'S'}$ zweier Schattenpunkte:*

S' ist der Schnittpunkt der Geraden k durch S mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ und der Ebene $x_3 = -18$. Die Koordinaten von A' sind $A'(3|3|-18)$.

$k: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$F: \;\; x_3 = -18$

$k \cap f$:
$x_1 = r;\ \ x_2 = -2r;\ \ x_3 = 12 - 4r$
$12 - 4r = -18$
$4r = 30 \quad => \quad r = \frac{15}{2}$
$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{15}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -15 \\ -18 \end{pmatrix}$
$A'(3|3|-18)$
$\left|\overrightarrow{S'A'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 - 7{,}5 \\ 3 + 15 \\ -18 + 18 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4{,}5^2 + 12^2} \approx 12{,}82$
Die Strecke $\overline{A'S'}$ hat eine Länge von etwa $12{,}8\ m$.