Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 03

Lösung M03B1

a) *Koordinatengleichung von Ebenen:*

E_1:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_1}} = (\overrightarrow{AB}) \times (\overrightarrow{AD}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + x_3 = d$

$2 \cdot 3 + 0 = 6 = d$

$E_1\colon\ 2x_1 + x_3 = 6$

E_2:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = (\overrightarrow{DC}) \times (\overrightarrow{DS}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$5x_1 + x_3 = d$

$5 \cdot 2 + 2 = 12 = d$

$E_2\colon\ 5x_1 + x_3 = 12$

Schnittwinkel von E_1 und E_2:

$$cos(\phi) = \frac{|\overrightarrow{n_{E_1}} \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|10+1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}}$$

$\phi = arccos\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right) \approx 15{,}255$

Der Schnittwinkel von E_1 und E_2 beträgt ca. $15{,}3\,°$

Größe der Innenwinkel des Dreiecks DCS:

Das Dreieck DCS ist ein gleichschenkliges Dreieck, somit $\alpha = \beta$ und $\gamma = 180 - 2 \cdot \alpha$.

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DS}|}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DS}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{105}} = \frac{2}{\sqrt{420}}$$

$\alpha = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{420}}\right) \approx 84{,}39\,°;\ \ \beta \approx 84{,}39\,°;\ \ \gamma \approx 11{,}2\,°$

Die Innenwinkel des Dreiecks DCS betragen $\alpha = \beta = 84{,}4°$ und $\gamma = 11{,}2°$.

b) *Kosten der Dachbedeckung:*

Gesamtfläche Dach:

Das Dach setzt sich zusammen aus jeweils viermal dem Trapez $ABCD$ sowie den Dreiecken CFB, DCS sowie CFS.

Trapez $ABCD$:

$A_{ABCD} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot h$ mit $h = \sqrt{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - \left(\frac{\overline{AB}-\overline{CD}}{2}\right)^2}$

$\overline{AB} = 6;\ \ \overline{CD} = 2;\ \ \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

$h = \sqrt{21 - \left(\frac{6-2}{2}\right)^2} = \sqrt{17}$

$A_{ABCD} = \frac{6+2}{2} \cdot \sqrt{17} = 4 \cdot \sqrt{17}$

$$A_{CFB} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17}$$

$$A_{CFS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CF} \times \overrightarrow{CS}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{209}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 03

$A_{DCS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{416}$

$A_{Dach} = 4 \cdot (A_{ABCD} + A_{CFB} + A_{CFS} + A_{DCS}) = 4 \cdot \left(4 \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{209} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{416}\right)$

$A_{Dach} \approx 143{,}92$

$K_{Dach} = A_{Dach} \cdot 53 \cdot 1{,}19 = 143{,}92 \cdot 53 \cdot 1{,}19 = 9077{,}14$

Die Kosten der Dachbedeckung belaufen sich auf brutto € 9.077,14.

c) *Befestigungspunkt P für einen Balken:*

Der Befestigungspunkt auf der Dachkante CS ist der Schnittpunkt einer Hilfsebene H durch R mit dem Richtungsvektor der Geraden g durch C und S als Normalenvektor und der Geraden g selbst.

$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$H: \quad -2x_1 - x_2 + 10x_3 = d$

$\quad -2 \cdot 0 - 0 + 10 \cdot 2 = d \quad => \quad d = 20$

$H: \quad -2x_1 - x_2 + 10x_3 = 20$

$g \cap H$:

$x_1 = 2 - 2r; \;\; x_2 = 1 - r; \;\; x_3 = 2 + 10r$

$-2(2 - 2r) - (1 - r) + 10(2 + 10r) = 20$

$-4 + 4r - 1 + r + 20 + 100r = 20$

$105r = 5 \;\; => \;\; r = \frac{1}{21}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{21} \\ \frac{20}{21} \\ \frac{52}{21} \end{pmatrix}$

Der Befestigungspunkt hat die Koordinaten $P\left(\frac{40}{21}\middle|\frac{20}{21}\middle|\frac{52}{21}\right)$.

d) *Mindestens $2\,m$ ins Freie ragende Fahnenstange:*

Bestimmung des Abstandes d von R zur Ebene E_2 (über die HNF) ergibt Länge der Fahnenstange im Inneren des Turms Die Länge, die ins Freie ragt, errechnet sich dann aus $l = 4 - d$.

HNF:

$\frac{5x_1 + x_3 - 12}{\sqrt{5^2 + 1}} = 0$

$d(E_2; R) = \frac{|5 \cdot 0 + 2 - 12|}{\sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{26}} \approx 1{,}96$

$l = 4 - d = 4 - 1{,}96 = 2{,}04$

Die Fahnenstange kann zur Aufhängung einer Fahne verwendet werden.

e) *Abstand $\overline{A'S'}$ zweier Schattenpunkte:*

S' ist der Schnittpunkt der Geraden k durch S mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ und der Ebene $x_3 = -18$. Die Koordinaten von A' sind $A'(3|3|-18)$.

$k: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$F: \;\; x_3 = -18$

$k \cap f$:

$x_1 = r;\ \ x_2 = -2r;\ \ x_3 = 12 - 4r$

$12 - 4r = -18$

$4r = 30\ \ => \ \ r = \frac{15}{2}$

$\overrightarrow{OS'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{15}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ -15 \\ -18 \end{pmatrix}$

$A'(3|3|-18)$

$\left|\overrightarrow{S'A'}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 - 7,5 \\ 3 + 15 \\ -18 + 18 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4,5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4,5^2 + 12^2} \approx 12,82$

Die Strecke $\overline{A'S'}$ hat eine Länge von etwa $12,8\,m$.