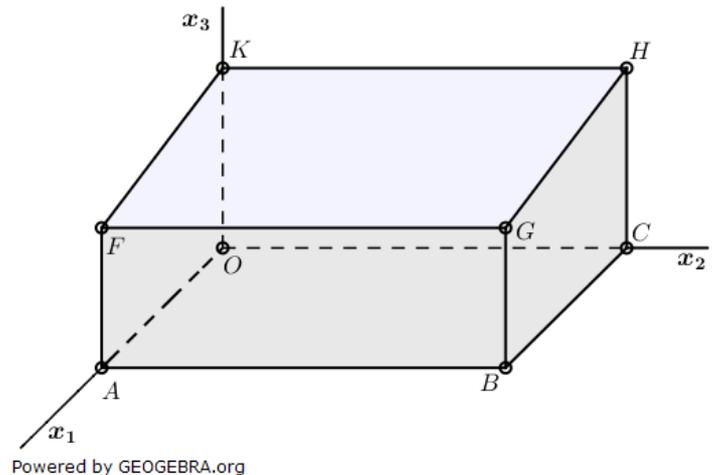




Aufgabe M04B1

Die Abbildung zeigt eine Scheune mit einem Pultdach. Die Eckpunkte haben die Koordinaten $A(6|0|0)$, $B(6|10|0)$, $C(0|10|0)$, $F(6|0|3)$, $G(6|10|3)$, $H(0|10|4)$, $K(0|0|4)$.

Auf dem Boden des Hauses wird ein 5 m langes, senkrecht stehendes Schornsteinrohr aufgestellt. Zur Vereinfachung betrachten wir bei der geometrischen Beschreibung dieses Schornsteinrohres nur den im Schornsteininneren verlaufenden Teil seiner Symmetrieachse. Der Fuß des Schornsteinrohres befindet sich dann im Punkt $I(4|7|0)$. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.



- a) Berechnen Sie den Rauminhalt der Scheune und die Größe ihrer Dachfläche.
- b) Die schräg verlaufende Dachfläche liege in der Ebene E .
 - (1) Geben Sie für die Ebene E eine Parameter- und eine Koordinatendarstellung an. (Kontrollergebnis: $E: x_1 + 6x_3 = 24$)
 - (2) Untersuchen Sie, ob der Punkt $I(1,5|7,5|,75)$ auf E liegt.
 - (3) Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Daches.
 - (4) Berechnen Sie den Abstand der Spitze des Schornsteinrohres vom Dach.
- c) Eine Sicherheitsvorschrift besagt, dass das Schornsteinrohr mindestens 2 m aus dem Dach herausragen muss. Bestimmen Sie den Punkt, in dem das Schornsteinrohr die Dachfläche durchstößt und begründen Sie Ihre Entscheidung, ob die Sicherheitsvorschrift eingehalten wird. Berechnen Sie, wie viel Prozent des Schornsteinrohres sich außerhalb des Daches befinden.
- d) Berechnen Sie den Abstand des oberen Schornsteinendes von der hinteren Dachkante.
- e) Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein. Berechnen Sie den Schattenpunkt der Spitze des Schornsteinrohres auf der Dachfläche.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 04
Lösung M04B1

a) *Rauminhalt der Scheune:*

Wir betrachten die Scheune als trapezförmiges Prisma mit der Grundfläche $BCHG$ (alternativ $AOKF$) und der Höhe AB .

$$V_{\text{Scheune}} = A_{BCHG} \cdot BC \cdot AB = \frac{(BG+CH)}{2} \cdot BC \cdot AB = \frac{3+4}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 210$$

Das Volumen der Scheune beträgt 210 m^3 .

Größe der Dachfläche:

Die Dachfläche ist ein Rechteck mit der Länge AB und Breite GH .

$$A_{\text{Dach}} = AB \cdot GH$$

$$GH = \sqrt{BC^2 + (CH - BG)^2} = \sqrt{36 + 1} \approx 6,08$$

$$A_{\text{Dach}} = 10 \cdot 6,08 = 60,8$$

Die Dachfläche ist etwa $60,8 \text{ m}^2$ groß.

b.1) *Ebenengleichungen der Dachfläche:*

Parameterform:

$$E: \vec{x} = \vec{OF} + r \cdot \vec{FK} + s \cdot \vec{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

$$k \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 6x_3 = d$$

$$6 + 6 \cdot 3 = 24 = d$$

$$E: x_1 + 6x_3 = 24$$

b.2) *Punkt P auf E:*

$$1,5 + 6 \cdot 3,75 \stackrel{!}{=} 24$$

$$24 = 24$$

Der Punkt P liegt auf E .

b.3) *Neigungswinkel des Dachs:*

Dies ist der Winkel, den die Dachfläche mit der Bodenebene bildet.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{\text{Boden}}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{\text{Boden}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right) \approx 9,4623^\circ$$

Der Neigungswinkel des Dachs beträgt etwa $9,5^\circ$.

b.4) *Abstand Spitze Schornsteinrohr zum Dach:*

Sei L der Durchstoßpunkt des Schornsteins mit dem Dach und g die Gerade, auf der der Schornstein liegt, so gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{OI} + r \cdot \vec{rv}_g \text{ mit } \vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ somit } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E \cap g$:

$$4 + 6t = 24 \Rightarrow t = \frac{10}{3}$$

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3,33 \end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 04

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad | \quad \text{Spitze des Schornsteins}$$

$$d(S; L) = x_{3_S} - x_{3_L} = 5 - 3,33 = 1,67$$

Der Schornstein ragt etwa 1,67 m über das Dach.

c) *Prüfung eines Sicherheitsabstandes:*

Wir berechnen den Durchstoßpunkt des Schornsteins mit der Dachfläche. Dies ist allerdings in Teilaufgabe b.4) bereits geschehen. Wie dort errechnet, ragt der Schornstein etwa 1,67 m über das Dach.

Der Sicherheitsabstand ist nicht eingehalten.

Prozentualer Anteil des Schornsteins außerhalb des Dachs:

$$p\% = \frac{1,67}{5} \cdot 100 = 33,4\%$$

Es liegen etwa 33,4 % des Schornsteins außerhalb der Dachfläche.

d) *Abstand des oberen Schornsteinendes von der hinteren Dachkante:*

Es ist dies der kürzeste Abstand des Punktes $S(4|7|5)$ von der Geraden h durch die Punkte K und H .

$$h: \vec{x} = \vec{OK} + t \cdot \vec{KH}$$

$$d(h; S) = \frac{|\vec{SK} \times \vec{KH}|}{|\vec{KH}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{1} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,1$$

Der Abstand der Schornsteinspitze zur hinteren Dachkante beträgt etwa 4,1 m.

e) *Schattenpunkt der Schornsteinspitze auf der Dachfläche:*

Dies ist der Schnittpunkt der Geraden l durch S mit dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen und der Dachfläche.

$$l: \vec{x} = \vec{OS} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$l \cap E$:

$$x_1 = 4 - t; \quad x_2 = 7 + 2t; \quad x_3 = 5 - 3t$$

$$4 - t + 6(5 - 3t) = 24$$

$$4 - t + 30 - 18t = 24$$

$$34 - 19t = 24 \Rightarrow t = \frac{10}{19}$$

$$\vec{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{10}{19} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{66}{19} \\ \frac{153}{19} \\ \frac{65}{19} \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schattenpunkt der Schornsteinspitze lauten:

$$R \left(\frac{66}{19} \mid \frac{153}{19} \mid \frac{65}{19} \right).$$