

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 04
Lösung M04B1

a) *Rauminhalt der Scheune:*

Wir betrachten die Scheune als trapezförmiges Prisma mit der Grundfläche $BCHG$ (alternativ $AOKF$) und der Höhe AB .

$$V_{\text{Scheune}} = A_{BCHG} \cdot BC \cdot AB = \frac{(BG+CH)}{2} \cdot BC \cdot AB = \frac{3+4}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 210$$

Das Volumen der Scheune beträgt 210 m^3 .

Größe der Dachfläche:

Die Dachfläche ist ein Rechteck mit der Länge AB und Breite GH .

$$A_{\text{Dach}} = AB \cdot GH$$

$$GH = \sqrt{BC^2 + (CH - BG)^2} = \sqrt{36 + 1} \approx 6,08$$

$$A_{\text{Dach}} = 10 \cdot 6,08 = 60,8$$

Die Dachfläche ist etwa $60,8 \text{ m}^2$ groß.

b.1) *Ebenengleichungen der Dachfläche:*

Parameterform:

$$E: \vec{x} = \vec{OF} + r \cdot \vec{FK} + s \cdot \vec{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

$$k \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 6x_3 = d$$

$$6 + 6 \cdot 3 = 24 = d$$

$$E: x_1 + 6x_3 = 24$$

b.2) *Punkt P auf E:*

$$1,5 + 6 \cdot 3,75 \stackrel{!}{=} 24$$

$$24 = 24$$

Der Punkt P liegt auf E .

b.3) *Neigungswinkel des Dachs:*

Dies ist der Winkel, den die Dachfläche mit der Bodenebene bildet.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{\text{Boden}}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{\text{Boden}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6}{\sqrt{37}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{37}}\right) \approx 9,4623^\circ$$

Der Neigungswinkel des Dachs beträgt etwa $9,5^\circ$.

b.4) *Abstand Spitze Schornsteinrohr zum Dach:*

Sei L der Durchstoßpunkt des Schornsteins mit dem Dach und g die Gerade, auf der der Schornstein liegt, so gilt:

$$g: \vec{x} = \vec{OI} + r \cdot \vec{rv}_g \text{ mit } \vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ somit } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E \cap g$:

$$4 + 6t = 24 \Rightarrow t = \frac{10}{3}$$

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3,33 \end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 04

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad | \quad \text{Spitze des Schornsteins}$$

$$d(S; L) = x_{3_S} - x_{3_L} = 5 - 3,33 = 1,67$$

Der Schornstein ragt etwa 1,67 m über das Dach.

c) *Prüfung eines Sicherheitsabstandes:*

Wir berechnen den Durchstoßpunkt des Schornsteins mit der Dachfläche. Dies ist allerdings in Teilaufgabe b.4) bereits geschehen. Wie dort errechnet, ragt der Schornstein etwa 1,67 m über das Dach.
Der Sicherheitsabstand ist nicht eingehalten.

Prozentualer Anteil des Schornsteins außerhalb des Dachs:

$$p\% = \frac{1,67}{5} \cdot 100 = 33,4\%$$

Es liegen etwa 33,4 % des Schornsteins außerhalb der Dachfläche.

d) *Abstand des oberen Schornsteinendes von der hinteren Dachkante:*

Es ist dies der kürzeste Abstand des Punktes $S(4|7|5)$ von der Geraden h durch die Punkte K und H .

$$h: \vec{x} = \vec{OK} + t \cdot \vec{KH}$$

$$d(h; S) = \frac{|\vec{SK} \times \vec{KH}|}{|\vec{KH}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{1} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4,1$$

Der Abstand der Schornsteinspitze zur hinteren Dachkante beträgt etwa 4,1 m.

e) *Schattenpunkt der Schornsteinspitze auf der Dachfläche:*

Dies ist der Schnittpunkt der Geraden l durch S mit dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen und der Dachfläche.

$$l: \vec{x} = \vec{OS} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$l \cap E$:

$$x_1 = 4 - t; \quad x_2 = 7 + 2t; \quad x_3 = 5 - 3t$$

$$4 - t + 6(5 - 3t) = 24$$

$$4 - t + 30 - 18t = 24$$

$$34 - 19t = 24 \Rightarrow t = \frac{10}{19}$$

$$\vec{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{10}{19} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{66}{19} \\ \frac{153}{19} \\ \frac{65}{19} \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schattenpunkt der Schornsteinspitze lauten:

$$R \left(\frac{66}{19} \mid \frac{153}{19} \mid \frac{65}{19} \right).$$