Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 06

Aufgabe M06B1

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

b) Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

Betrachtet wird nun die Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

c) Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist.

d) Die Kante AS steht senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E\colon\ x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A(0|\sqrt{2}|2)$ und die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$ gegeben.

e) Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse und mit der x_3-Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem.

Die x_1x_2-Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

f) Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 06

An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M(0|3\sqrt{2}|2)$ hat.

g) Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B. Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.
(Teilergebnis: $B(-1|2\sqrt{2}|3)$)

h) Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt:
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$.

i) Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $\overline{AB}$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15\,m/s$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem $10\,m$ in der Realität entspricht.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 06

Lösung M06B1

a) *Abstand der Punkte A und B:*

$$d(A;B) = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

Koordinaten von C und D:

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = 6$ liegen die Punkte und jeweils $2\cdot|\overrightarrow{AB}|$ von A entfernt.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0A} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\10\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0A} - 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-7\\-6\end{pmatrix}$$

Die beiden Punkte haben die Koordinaten $C(4|9|10)$ und $D(-4|-7|-6)$.

b) *Eckpunkte eines Parallelogramms:*

Situation 1:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$C(3|6|9)$

Situation 2:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

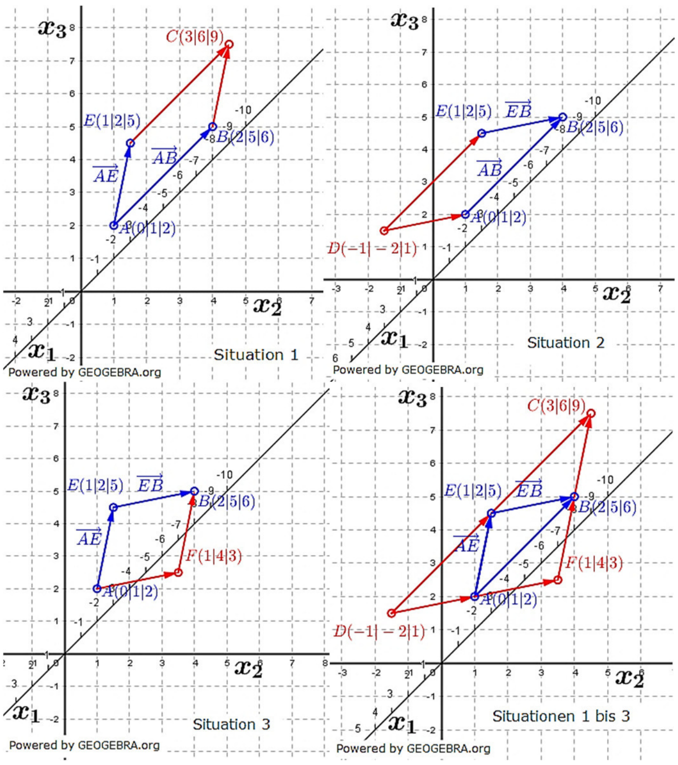
$D(-1|-2|1)$

Situation 3:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{EB}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$$

$F(1|4|3)$



c) *Nachweis eines Parallelogramms:*

Es muss gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \wedge |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix};\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+16+4} = 6 = |\overrightarrow{DC}|$$

Das Viereck ist ein Parallelogramm.

d) *Volumen einer Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot h$

Zur Ermittlung von h benötigen wir den Normalenvektor der Ebene in der die Grundfläche liegt sowie die Koordinatengleichung von E.

$$\overrightarrow{n_E} = k \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -32 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ | $d = 0$, da Ebene durch Ursprung

Gerade g durch S mit $\overrightarrow{n_E}$ als Richtungsvektor:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$g \cap E$:

$x_1 = 1 + r;\quad x_2 = 1 + r;\quad x_3 = -4 - 4r$

$1 + r + 1 + r - 4 - 4r = 0$

$-2 - 2r = 0 \quad => \quad r = 1$

Schnittpunkt L:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Höhe h der Pyramide:

$$h = \left|\overrightarrow{OL}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ -8+4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 48$

Die Pyramide hat ein Volumen von $48\,VE$.

e) *Besondere Lage der Ebene E:*

In der Koordinatengleichung von E fehlt die x_2-Koordinate, die Ebene verläuft parallel zur x_2-Achse.

g mit $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in E$:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prüfung, ob $\overrightarrow{n_E} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0$$

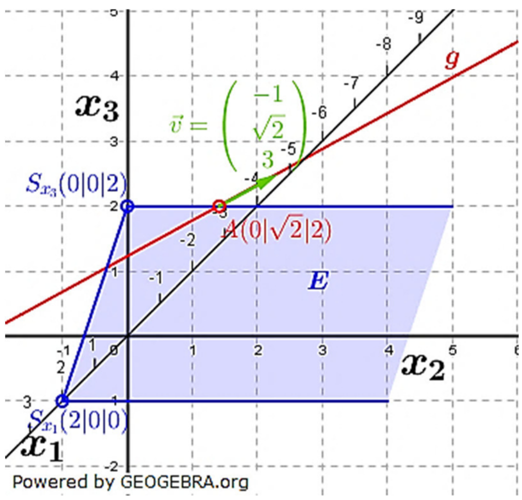
Somit ist $g \parallel E$.

Prüfung, ob $A \in E$:

$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 = 2$

$2 = 2 \quad => \quad A \in E$

Die Gerade g verläuft in E.



Spurpunkte von E:

$x_1 + x_3 = 2 \qquad | \quad :2$

$\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$

$S_{x_1}(2|0|0); \quad S_{x_3}(0|0|2)$

Verdeutlichung in Koordinatensystem siehe Graphik oben.

f) *Anstiegswinkel gegenüber der Horizontalen:*
Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene.

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2}$$

$\varphi = arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30\,°$

Der Anstiegswinkel gegenüber der Horizontalen ist $30\,°$ groß.

g) *Ermittlung von Koordinaten von B:*
Der Vektor $\overrightarrow{MB}$ und der Richtungsvektor von g stehen senkrecht aufeinander.

$\overrightarrow{MB} \circ \overrightarrow{rv_g} = 0$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 - s - 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s - 3\sqrt{2} \\ 2 + s - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -s \\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$s - 4 + 2s + s = 0$

$4s = 4; \;\; => \;\; s = 1$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

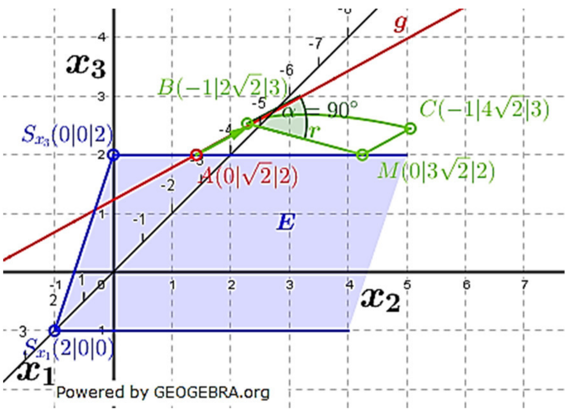
Die Koordinaten sind $B(-1|2\sqrt{2}|3)$.

Kurvenradius:

$$r = |\overrightarrow{MB}| = \left|\begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ 3 - 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2$$

Der Kurvenradius beträgt $2\,LE$.

h) *Ortsvektor für Kurvenpunkt C:*
Wegen $\overrightarrow{MB} \perp g$ (siehe Aufgabenstellung, Graphik) und der Angabe „Rechtskurve mit Viertelkreis" ist auch $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$. Somit ist die Strecke $\overline{MC} \parallel g$ und damit auch $\overrightarrow{MC} \parallel \vec{v}$.
Wegen $|\vec{v}| = r = 2$ gilt dadurch:
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$.



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 06

i) *Zeit für Fahrt der Achterbahn:*
Bestimmung der Fahrtstrecke:
Die Fahrtstrecke setzt sich zusammen aus der Länge der Strecke $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$ und der Länge $b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot r$ des Viertelkreisbogens.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -1-0 \\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 3-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 2$$

$$l = |\overrightarrow{AB}| + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot r = 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2 + \pi \approx 5{,}14\ LE$$

Wegen $1\ LE = 10\ m$ beträgt die Fahrtstrecke etwa $51{,}4\ m$.
Bei einer Geschwindigkeit von $15\ m/s$ *wird diese Strecke in* $t = \frac{s}{v} = \frac{51{,}4}{15} \approx 3{,}4\ s$ *durchfahren.*