Lösung M06B1

a) *Abstand der Punkte A und B:*

$$d(A;B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

Koordinaten von C und D:

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$ liegen die Punkte und jeweils $2\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|$ von A entfernt.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0A} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\10\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0A} - 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-7\\-6\end{pmatrix}$$

Die beiden Punkte haben die Koordinaten $C(4|9|10)$ und $D(-4|-7|-6)$.

b) *Eckpunkte eines Parallelogramms:*

Situation 1:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

$C(3|6|9)$

Situation 2:

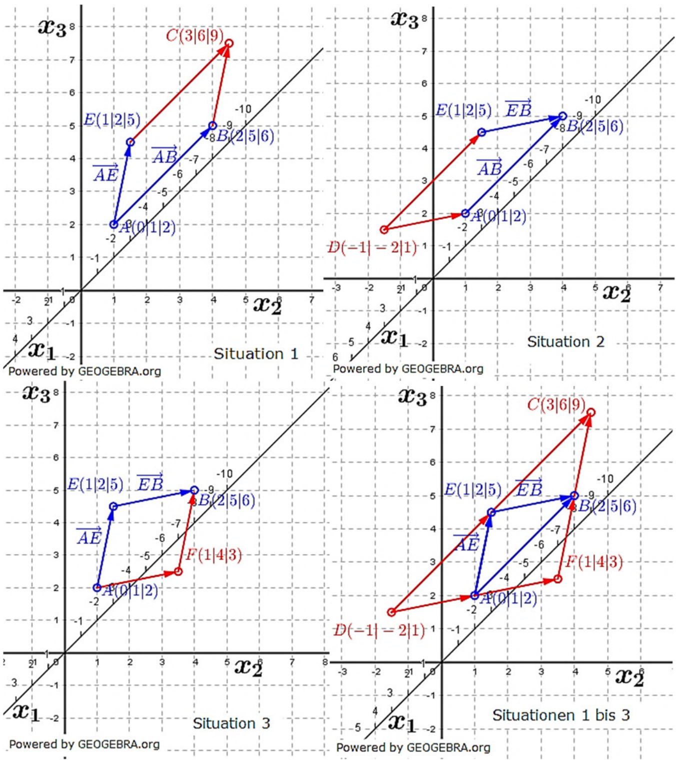
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{AB}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$D(-1|-2|1)$

Situation 3:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{EB}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$$

$F(1|4|3)$



c) *Nachweis eines Parallelogramms:*

Es muss gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6 = \left|\overrightarrow{DC}\right|$$

Das Viereck ist ein Parallelogramm.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 06

d) *Volumen einer Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot h$

Zur Ermittlung von h benötigen wir den Normalenvektor der Ebene in der die Grundfläche liegt sowie die Koordinatengleichung von E.

$\overrightarrow{n_E} = k \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -32 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$E\colon\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ | $d = 0$, da Ebene durch Ursprung

Gerade g durch S mit $\overrightarrow{n_E}$ als Richtungsvektor:

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$g \cap E$:

$x_1 = 1 + r;\quad x_2 = 1 + r;\quad x_3 = -4 - 4r$

$1 + r + 1 + r - 4 - 4r = 0$

$-2 - 2r = 0 \quad => \quad r = 1$

Schnittpunkt L:

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Höhe h der Pyramide:

$h = |\overrightarrow{OL}| = \left| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ -8+4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 48$

Die Pyramide hat ein Volumen von $48\,VE$.

e) *Besondere Lage der Ebene E:*

In der Koordinatengleichung von E fehlt die x_2-Koordinate, die Ebene verläuft parallel zur x_2-Achse.

g mit $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in E$:

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfung, ob $\overrightarrow{n_E} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0$

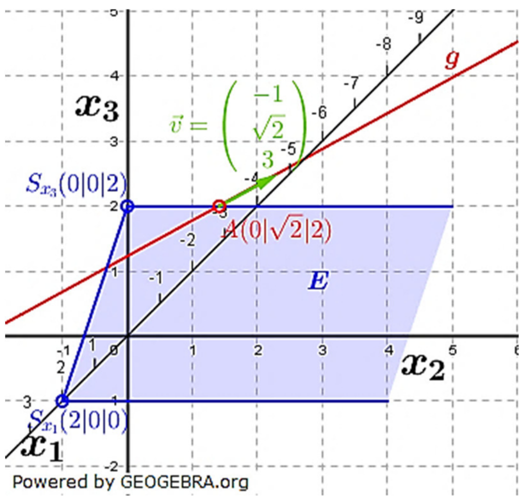
Somit ist $g \parallel E$.

Prüfung, ob $A \in E$:

$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 = 2$

$2 = 2 \quad => \quad A \in E$

Die Gerade g verläuft in E.



Spurpunkte von E:

$x_1 + x_3 = 2 \qquad | \quad :2$

$\frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$

$S_{x_1}(2|0|0); \quad S_{x_3}(0|0|2)$

Verdeutlichung in Koordinatensystem siehe Graphik oben.

f) *Anstiegswinkel gegenüber der Horizontalen:*

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene.

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{2}$$

$\varphi = arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30\,°$

Der Anstiegswinkel gegenüber der Horizontalen ist $30\,°$ groß.

g) *Ermittlung von Koordinaten von B:*

Der Vektor $\overrightarrow{MB}$ und der Richtungsvektor von g stehen senkrecht aufeinander.

$\overrightarrow{MB} \circ \overrightarrow{rv_g} = 0$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 - s - 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s - 3\sqrt{2} \\ 2 + s - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -s \\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot s \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$s - 4 + 2s + s = 0$

$4s = 4; \; => \; s = 1$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $B(-1|2\sqrt{2}|3)$.

Kurvenradius:

$$r = |\overrightarrow{MB}| = \left|\begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ 3 - 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2$$

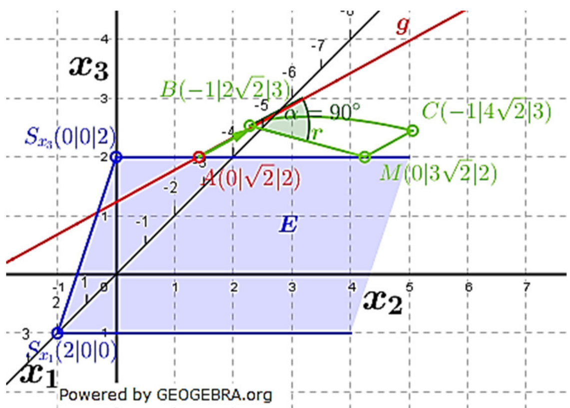
Der Kurvenradius beträgt $2\,LE$.

h) *Ortsvektor für Kurvenpunkt C:*

Wegen $\overrightarrow{MB} \perp g$ (siehe Aufgabenstellung, Graphik) und der Angabe „Rechtskurve mit Viertelkreis“ ist auch $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$. Somit ist die Strecke $\overline{MC} \parallel g$ und damit auch $\overrightarrow{MC} \parallel \vec{v}$.

Wegen $|\vec{v}| = r = 2$ gilt dadurch:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$.



i) *Zeit für Fahrt der Achterbahn:*
Bestimmung der Fahrtstrecke:
Die Fahrtstrecke setzt sich zusammen aus der Länge der Strecke $\overline{AB} = \overrightarrow{|AB|}$ und der Länge $b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot r$ des Viertelkreisbogens.

$$\overrightarrow{|AB|} = \left| \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2} \\ 3-2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 2$$

$$l = \overrightarrow{|AB|} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot r = 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2 + \pi \approx 5{,}14\ LE$$

Wegen $1\ LE = 10\ m$ beträgt die Fahrtstrecke etwa $51{,}4\ m$.
Bei einer Geschwindigkeit von $15\ m/s$ *wird diese Strecke in* $t = \frac{s}{v} = \frac{51{,}4}{15} \approx 3{,}4\ s$ *durchfahren.*