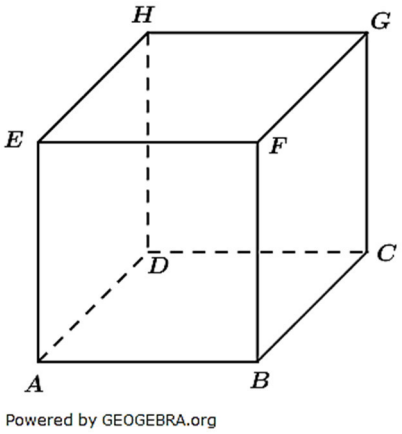
Aufgabe M07B1

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.

b) Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

d) Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:
I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.
Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$ und $C(3|3|6)$ das gleichseitige Dreieck ABC fest.

e) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Koordinatenform.
(Teilergebnis: $E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 12$)

Spiegelt man die Punkte A, B und C am Symmetriezentrum $Z(3|3|3)$, so erhält man die Punkte A', B' bzw. C'.

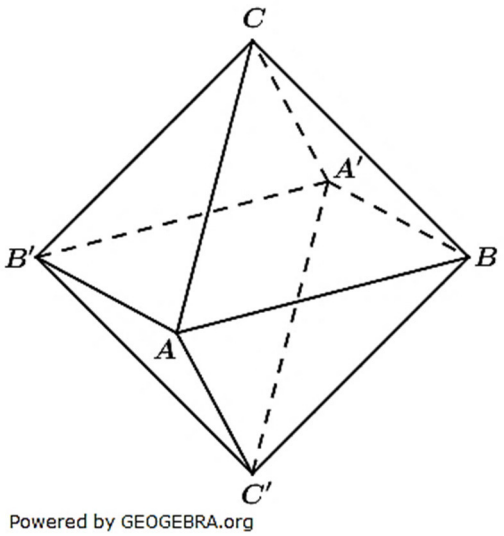
f) Beschreiben Sie die Lage der Ebene, in der die Punkte A, B und Z liegen, im Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{CC'}$ senkrecht auf dieser Ebene steht.

g) Begründen Sie, dass das Viereck $ABA'B'$ Quadrat mit der Seitenlänge $3\sqrt{2}$ ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 07

Der Körper $ABA'B'CC'$ ist ein sogenanntes Oktaeder. Er besteht aus zwei Pyramiden mit dem Quadrat $ABA'B'$ als gemeinsamer Grundfläche und den Pyramidenspitzen C bzw. C'.



h) Weisen Sie nach, dass das Oktaeder das Volumen 36 besitzt.

i) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Seitenflächen ABC und $AC'B$.

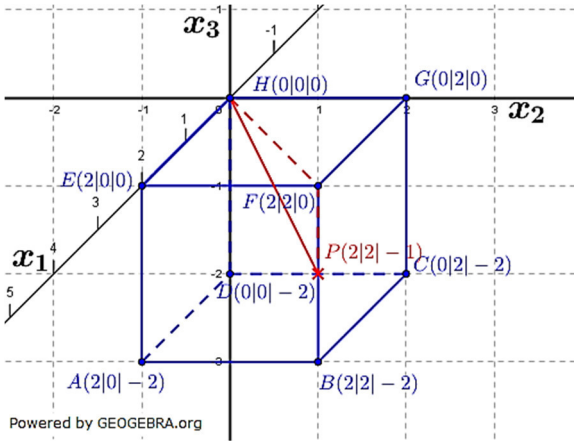
j) Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an.
Berechnen Sie den Anteil des Oktaeder-Volumens am Kugelvolumen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 07

Lösung M07B1

a) *Koordinatensystem:*
Siehe Grafik rechts.
Koordinaten von A:
$A(2|0|-2)$



b) *Koordinaten von P:*

$\overline{HP} = 3$ | Aufgabenstellung

$\overline{HP} = \sqrt{\overline{HF}^2 + \overline{FP}^2}$

$\overline{HF} = 2 \cdot \sqrt{2}$ | Diagonale des

$3 = \sqrt{8 + \overline{FP}^2}$ | Quadrats.

$9 = 8 + \overline{FP}^2$

$\overline{FP}^2 = 9 - 8 = 1$

$\overline{FP} = \pm 1$

Da P unterhalb von F liegt, ist $\overline{FP} = -1$ die gesuchte Lösung.
Die Koordinaten lauten $P(2|2|-1)$.

c) *Koordinaten von C:*
Es soll gelten: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -4-(-2) \\ 0-1 \\ 6-4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $C(2|3|0)$.

d) *Gleichung einer Geraden h, die die Bedingungen I) und II) erfüllen:*
Gerade g durch A und B:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jede Gerade h, für deren Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ gilt, steht senkrecht auf g. So ist z.B. $\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein solcher, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0$. Da der Richtungsvektors von g mit $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Länge $|\overrightarrow{rv_g}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$ hat, haben die Punkte $\overrightarrow{x_{1,2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \pm 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Abstand 3 von A. Dies ist für $+1$ der Punkt B.

$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt die genannten Bedingungen.

e) Ebene E in der das Dreieck ABC liegt.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = d$

$6 + 3 + 3 = d$ | Punktprobe mit A

$d = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$

f) *Lage der Ebene durch A, B und Z:*

Alle 3 Punkte haben die x_3-Koordinate 3. Die Ebene, in der die Punkte liegen, ist somit eine Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene im Abstand 3 mit der Gleichung F: $x_3 = 3$.

Nachweis der Lage der Strecke CC':

Zunächst Bestimmung von C' über $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CZ}$.

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade durch C und C' hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Ebene F hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit ist $g \perp F$.

g) *Viereck $ABA'B'$:*

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB'} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \left|\overrightarrow{AB'}\right| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BA'} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \left|\overrightarrow{BA'}\right| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left|\overrightarrow{AB'}\right| = |BA'| = 3 \cdot \sqrt{2} \wedge \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB'} = 0$ ist das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Kantenlänge $a = 3 \cdot \sqrt{2}$. ***q.e.d.***

h) *Volumen des Oktaeders $ABA'B'CC'$:*
Das Volumen ist zweimal das Volumen der Pyramide $ABA'B'C$.

$$V_{ABA'B'C} = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB'}\right) \circ \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{3}\left|\left(\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\18\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 3 \cdot 18) = 18$$

$V_{ABA'B'CC'} = 2 \cdot V_{ABA'B'C} = 36$

Das Volumen des Oktaeders beträgt $36\,VE$.

i) *Winkel zwischen Seitenfläche ABC und ABC':*
Winkel zwischen den Ebenen E_{ABC} und $E_{ABC'}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_{ABC}}} \cdot \overrightarrow{n_{E_{ABC}'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_{ABC}}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_{ABC}'}}\right|}$$

$$\overrightarrow{n_{E_{ABC}}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_{ABC}'}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\9\end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}53\,°$

Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen ist jedoch ein stumpfer Winkel, sodass gilt:

$\alpha^* = 180° - 70{,}53° = 109{,}47\,°$

Der Winkel zwischen den beiden Seitenfläche ABC und ABC' beträgt etwa $109{,}5\,°$.

j) *Eckpunkte des Oktaeders auf einer Kugel:*
Es muss gelten:

$|\overrightarrow{ZA}| = |\overrightarrow{ZB}| = |\overrightarrow{ZA'}| = |\overrightarrow{ZB'}| = |\overrightarrow{ZC}| = r$

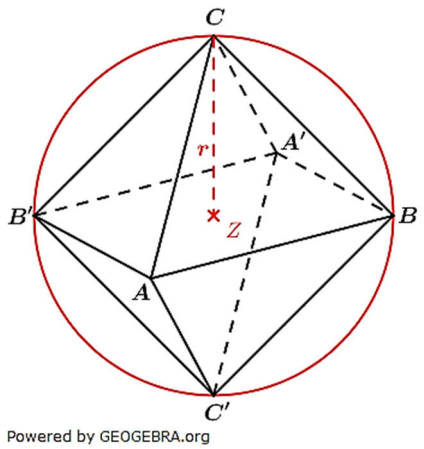
$$|\overrightarrow{ZA}| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZA'}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZB'}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZC}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right| = 3$$



Die Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel mit Mittelpunkt Z und Radius $r = 3\,LE$.

Gleichung der Kugel:

$K\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 = 9$ *bzw.*

$(x\colon 1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$

Anteil des Oktaeder-Volumens am Kugelvolumen:

$p\% = \frac{V_{Okt}}{V_{Kug}} \cdot 100 = \frac{36}{\frac{4}{3}\pi 3^3} \cdot 100 = 31{,}83\ \%$

Das Oktaedervolumen hat etwa $31{,}8\ \%$ *des Kugelvolumens.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de