

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 07

- e) Ebene E in der das Dreieck ABC liegt.

$$k \cdot \vec{n}_E = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = d$$

$$6 + 3 + 3 = d$$

$$d = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

| Punktprobe mit A

- f) Lage der Ebene durch A , B und Z :

Alle 3 Punkte haben die x_3 -Koordinate 3. Die Ebene, in der die Punkte liegen, ist somit eine Ebene parallel zur x_1x_2 -Ebene im Abstand 3 mit der Gleichung $F: x_3 = 3$.

Nachweis der Lage der Strecke CC' :

Zunächst Bestimmung von C' über $\vec{OC'} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CZ}$.

$$\vec{OC'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CC'} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade durch C und C' hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Ebene F hat

den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit ist $g \perp F$.

- g) Viereck $ABA'B'$:

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AZ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OB'} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BZ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{AB}| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{A'B'} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{A'B'}| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{AB'} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{AB'}| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{BA'} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{BA'}| = \sqrt{9+9} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\vec{AB} \circ \vec{AB'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$$

Wegen $|\vec{AB}| = |\vec{A'B'}| = |\vec{AB'}| = |\vec{BA'}| = 3 \cdot \sqrt{2} \wedge \vec{AB} \circ \vec{AB'} = 0$ ist das Viereck $ABA'B'$ ein Quadrat mit der Kantenlänge $a = 3 \cdot \sqrt{2}$. **q.e.d.**

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 07

- h) *Volumen des Oktaeders $ABA'B'C'$:*

Das Volumen ist zweimal das Volumen der Pyramide $ABA'B'C$.

$$V_{ABA'B'C} = \frac{1}{3} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB'}) \circ \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{3} \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 3 \cdot 18) = 18$$

$$V_{ABA'B'C'C'} = 2 \cdot V_{ABA'B'C} = 36$$

Das Volumen des Oktaeders beträgt 36 VE.

- i) *Winkel zwischen Seitenfläche ABC und ABC' :*

Winkel zwischen den Ebenen E_{ABC} und $E_{ABC'}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n}_{E_{ABC}} \cdot \overrightarrow{n}_{E_{ABC'}}|}{|\overrightarrow{n}_{E_{ABC}}| \cdot |\overrightarrow{n}_{E_{ABC'}}|}$$

$$\overrightarrow{n}_{E_{ABC}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}_{E_{ABC'}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ$$

Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen ist jedoch ein stumpfer Winkel, sodass gilt:

$$\alpha^* = 180^\circ - 70,53^\circ = 109,47^\circ$$

Der Winkel zwischen den beiden Seitenfläche ABC und ABC' beträgt etwa $109,5^\circ$.

- j) *Eckpunkte des Oktaeders auf einer Kugel:*

Es muss gelten:

$$|\overrightarrow{ZA}| = |\overrightarrow{ZB}| = |\overrightarrow{ZA'}| = |\overrightarrow{ZB'}| = |\overrightarrow{ZC}| = r$$

$$|\overrightarrow{ZA}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3$$

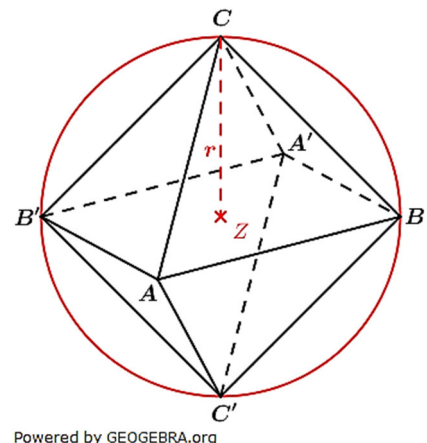
$$|\overrightarrow{ZB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZA'}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZB'}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$|\overrightarrow{ZC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$$

Die Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel mit Mittelpunkt Z und Radius $r = 3$ LE.



Powered by GEOGEBRA.org

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 07

Gleichung der Kugel:

$$K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 = 9 \text{ bzw.}$$

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$$

Anteil des Oktaeder-Volumens am Kugelvolumen:

$$p\% = \frac{V_{Okt}}{V_{Kug}} \cdot 100 = \frac{36}{\frac{4}{3}\pi 3^3} \cdot 100 = 31,83 \%$$

Das Oktaedervolumen hat etwa 31,8 % des Kugelvolumens.