Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

Aufgabe M08B1

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden durch die Punkte A und B, nicht aber auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

b) Auf der Strecke $\overline{AB}$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

c) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

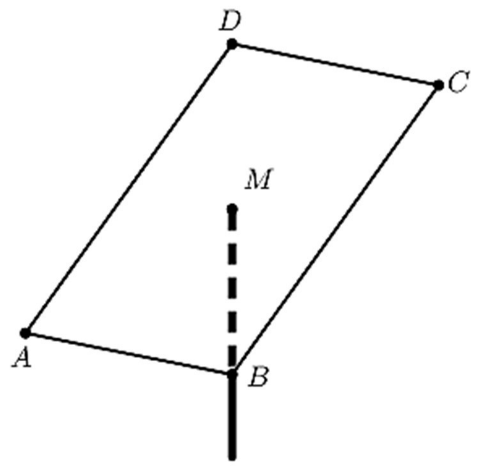
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E und bilden ein Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen sich im Punkt M schneiden.

e) Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft.

f) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.
(Teilergebnis: $M(-2|4|3)$)

g) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(Teilergebnis: $E\colon\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$)

Ein Solarmodul wird an einem Metallrohr befestigt, das auf einer horizontalen Fläche senkrecht steht. Das Solarmodul wird modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich durch eine Strecke, der Befestigungspunkt am Solarmodul durch den Punkt M beschreiben (vgl. Abbildung).
Die horizontale Fläche liegt im Modell in der x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems; eine Längeneinheit entspricht $0{,}8\,m$ in der Realität.



Powered by GEOGEBRA.org

h) Um einen möglichst großen Energieertrag zu erzielen, sollte die Größe des Neigungswinkels des Solarmoduls gegenüber der Horizontalen zwischen $30°$ und $36°$ liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

i) Auf das Solarmodul fällt Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, die senkrecht zur Ebene E verlaufen. Das Solarmodul erzeugt auf der horizontalen Fläche einen rechteckigen Schatten.
Zeigen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms
$\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos(\varphi)} \cdot (0{,}8\ m)^2$ berechnet werden kann.

j) Um die Sonneneinstrahlung im Laufe des Tages möglichst effektiv zur Energiegewinnung nutzen zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Solarmodul um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Größe des Neigungswinkels φ gegenüber der Horizontalen bleibt dabei unverändert.
Betrachtet wird der Eckpunkt des Solarmoduls, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird.
Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt des Solarmoduls bei der Drehung des Metallrohrs bewegt, auf Zentimeter genau.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

Lösung M08B1

a) *Punkt C auf Gerade durch Punkte A und B, nicht aber auf $\overline{AB}$.*

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Wenn C auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen soll, dann muss $0 \le r \le 1$ sein.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 + 4r = 0 \ => \ r = -\frac{1}{2}$

$1 = 1 \ => \ r = -\frac{1}{2}$

$-4 - 8r = 0 \ => \ r = -\frac{1}{2}$

Wegen $r = -\frac{1}{2}$ für x_1, x_2 und x_3 liegt Punkt C auf der Geraden g.

Wegen $r = -\frac{1}{2}$ liegt der Punkt nicht auf der Strecke $\overline{AB}$.

b) Punkt D auf $\overline{AB}$, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A*:*

Der Punkt D viertelt die Strecke $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $D(3|1|-6)$.

c) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*

$E\colon\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

Bestimmung der Spurpunkte S_{x_1} und S_{x_2}:

$S_{x_1}(-9|0|0)$; $\quad S_{x_2}(0|-18|0)$

Fläche des Dreiecks $OS_{x_1}S_{x_2}$:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_{x_1}} \times \overrightarrow{OS_{x_2}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 162 \end{pmatrix} \right| = 81$$

Einfacher:

Das Dreieck $OS_{x_1}S_{x_2}$ ist bei O rechtwinklig.

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$

Das Dreieck $OS_{x_1}S_{x_2}$ hat einen Flächeninhalt von $81\ FE$.

d) *Koordinaten eines Ortsvektors entsprechen einem Normalenvektor:*

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad => \quad P(2t|t|-2t)$$

$2 \cdot 2t + t - 2 \cdot (-2t) = -18$

$9t = -18 \ \ => \ \ t = -2$

$$\overrightarrow{OP} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten $P(-4|-2|4)$ entsprechen einem Normalenvektor von E.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

e) *Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene:*

$$g_{AB}\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen der fehlenden x_3-Koordinate des Richtungsvektors von AB verläuft die Gerade parallel zur x_1x_2-Ebene.

f) *Nachweis Viereck $ABCD$ ein Rechteck:*

Es muss gelten $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \wedge \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0 \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{56}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.

Koordinaten des Mittelpunktes M:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $M(-2|4|3)$.

g) *Koordinatenform von E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$3x_1 - x_2 + 5x_3 = d$
$3 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 1 = d$
$d = 5$
$E\colon\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$

h) *Neigungswinkel des Spiegels zur Horizontalen:*

Schnittwinkel Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.

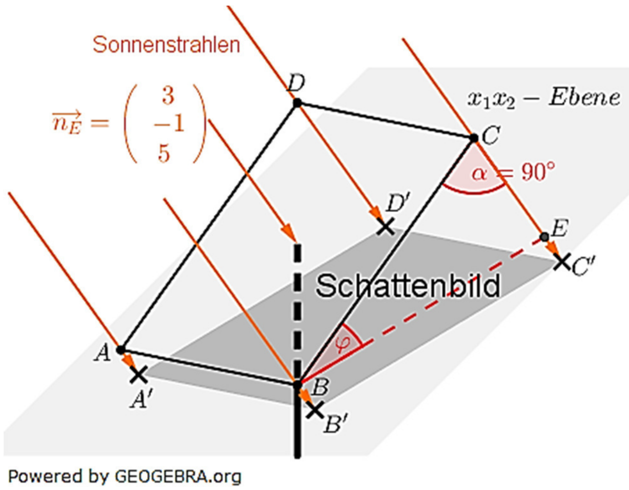
$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{\sqrt{35} \cdot 1}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) \approx 32{,}3\,°$$

Der Neigungswinkel des Spiegels mit der Horizontalen beträgt etwa $32\,°$. Die genannte Bedingung ist erfüllt.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

i) *Flächeninhalt eines Schattens:*
Die Fläche des Schattens errechnet sich aus $\overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'}$
Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft parallel zur x_1-Achse, damit ist $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.
Da die Sonnenstrahlen in Richtung des Normalenvektors von E einfallen, liegt bei C rechter Winkel vor.
Betrachtet wird nun das rechtwinklige Dreieck BCE.
Wegen $\overline{BE} = \overline{B'C'}$ gilt:



$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \cos(\varphi)$

$\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{\cos\{\varphi)}$

Wegen Aufgabenstellung „1 Längeneinheit entspricht $0{,}8\, m$“ berechnet sich die Schattenfläche über $A_{Schatten} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{BC}}{\cos\{\varphi)} \cdot 0{,}8^2\ [m^2]$

q.e.d.

j) *Radius des Kreises, auf dem sich A bei der Drehung des Metallrohrs bewegt:*
Dies ist der Abstand des Punktes A von der Geraden m, in der das Metallrohr und der Punkt M liegt.

$m\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(A; m) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{1} = \sqrt{20} \approx 4{,}47214$

$4{,}47214 \cdot 0{,}8 = 3{,}5777$

Der Radius hat eine Länge von $3{,}6\, m$.