Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

Lösung M08B1

a) *Punkt C auf Gerade durch Punkte A und B, nicht aber auf $\overline{AB}$.*

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Wenn C auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen soll, dann muss $0 \le r \le 1$ sein.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 + 4r = 0 \;\; => \;\; r = -\frac{1}{2}$

$1 = 1 \;\; => \;\; r = -\frac{1}{2}$

$-4 - 8r = 0 \;\; => \;\; r = -\frac{1}{2}$

Wegen $r = -\frac{1}{2}$ für x_1, x_2 und x_3 liegt Punkt C auf der Geraden g.

Wegen $r = -\frac{1}{2}$ liegt der Punkt nicht auf der Strecke $\overline{AB}$.

b) Punkt D auf $\overline{AB}$, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A*:*

Der Punkt D viertelt die Strecke $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $D(3|1|-6)$.

c) *Flächeninhalt eines Dreiecks:*

$E\colon\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

Bestimmung der Spurpunkte S_{x_1} und S_{x_2}:

$S_{x_1}(-9|0|0)$; $\quad S_{x_2}(0|-18|0)$

Fläche des Dreiecks $OS_{x_1}S_{x_2}$:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_{x_1}} \times \overrightarrow{OS_{x_2}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 162 \end{pmatrix}\right| = 81$$

Einfacher:

Das Dreieck $OS_{x_1}S_{x_2}$ ist bei O rechtwinklig.

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$

Das Dreieck $OS_{x_1}S_{x_2}$ hat einen Flächeninhalt von $81\ FE$.

d) *Koordinaten eines Ortsvektors entsprechen einem Normalenvektor:*

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad => \quad P(2t|t|-2t)$$

$2 \cdot 2t + t - 2 \cdot (-2t) = -18$

$9t = -18 \;\; => \;\; t = -2$

$$\overrightarrow{OP} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten $P(-4|-2|4)$ entsprechen einem Normalenvektor von E.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 08

e) *Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene:*

$$g_{AB}:\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$$

Wegen der fehlenden x_3-Koordinate des Richtungsvektors von AB verläuft die Gerade parallel zur x_1x_2-Ebene.

f) *Nachweis Viereck $ABCD$ ein Rechteck:*

Es muss gelten $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|\wedge\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}=0\wedge|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{AD}|$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{CD}|=\left|\begin{pmatrix}0\\-6\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{40}$$

$$|\overrightarrow{AD}|=\left|\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{56}$$

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}=-12+12=0$$

Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.

Koordinaten des Mittelpunktes M:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $M(-2|4|3)$.

g) *Koordinatenform von E:*

$$k\cdot\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-8\\40\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$3x_1-x_2+5x_3=d$

$3\cdot0-0+5\cdot1=d$

$d=5$

$E:\ 3x_1-x_2+5x_3=5$

h) *Neigungswinkel des Spiegels zur Horizontalen:*

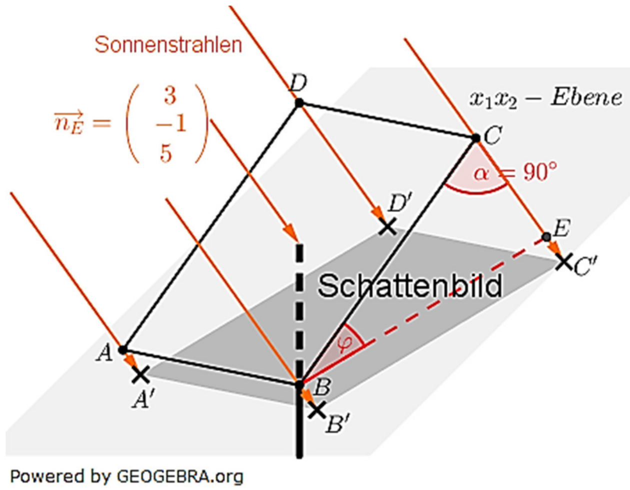
Schnittwinkel Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.

$$cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{5}{\sqrt{35}\cdot1}$$

$$\alpha=arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)\approx32{,}3\,°$$

Der Neigungswinkel des Spiegels mit der Horizontalen beträgt etwa $32\,°$. Die genannte Bedingung ist erfüllt.

i) *Flächeninhalt eines Schattens:*
Die Fläche des Schattens errechnet sich aus $\overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'}$
Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft parallel zur x_1-Achse, damit ist $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.
Da die Sonnenstrahlen in Richtung des Normalenvektors von E einfallen, liegt bei C rechter Winkel vor.
Betrachtet wird nun das rechtwinklige Dreieck BCE.
Wegen $\overline{BE} = \overline{B'C'}$ gilt:



$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \cos(\varphi)$

$\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{\cos(\varphi)}$

Wegen Aufgabenstellung „1 Längeneinheit entspricht $0{,}8\,m$" berechnet sich die Schattenfläche über $A_{Schatten} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{BC}}{\cos(\varphi)} \cdot 0{,}8^2\ [m^2]$

q.e.d.

j) *Radius des Kreises, auf dem sich A bei der Drehung des Metallrohrs bewegt:*
Dies ist der Abstand des Punktes A von der Geraden m, in der das Metallrohr und der Punkt M liegt.

$$m\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d(A;m) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{1} = \sqrt{20} \approx 4{,}47214$$

$4{,}47214 \cdot 0{,}8 = 3{,}5777$

Der Radius hat eine Länge von $3{,}6\,m$.