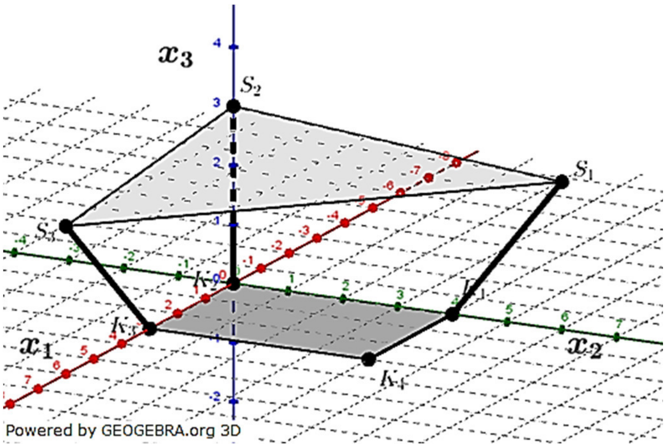
Aufgabe M09B1

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad r \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punkts, in dem g_a die x_1x_2-Ebene schneidet.

b) Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.



Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben.
Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2{,}5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2{,}5)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.
Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(Teilergebnis: $E\colon\ x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

d) Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als $20\,m^2$ durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

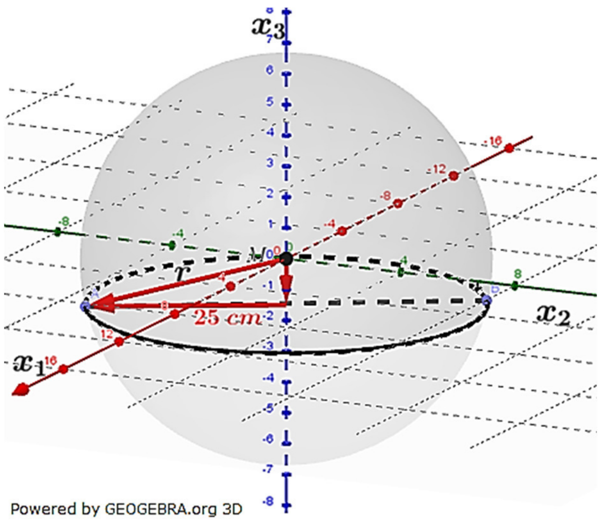
Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S'_2 bzw. S'_3 bezeichnet.

e) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S'_2 auf der x_2-Achse liegt.

f) S'_3 hat die Koordinaten $S'_3(6|-2|0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in die obige Abbildung ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

g) Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens $8°$ gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

h) Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von $50\,cm$. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche $5\,cm$ tief.
Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung).
Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel



$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$$

berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen.
Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 09

Lösung M09B1

a) *Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ von g_a mit der x_1x_2-Ebene:*
Dieser Punkt hat die Koordinate $x_3 = 0$.
$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$4 + r = 0 \;=>\; r = -4$
$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+8 \\ 0 \end{pmatrix}$
Die Koordinaten sind $S_{x_1x_2}(-6|a+8|0)$.

b) a für Schnittpunkt S_{x_3} von g_a mit der x_3-Achse:
Dieser Punkt hat die Koordinate $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.
$2 + 2r = 0 \;=>\; r = -1$
$a - 4 - 1 \cdot (-2) = 0$
$a - 4 + 2 = 0 \;=>\; a = 2$
$\overrightarrow{OS_{x_3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
Die Koordinaten sind $S_{x_3}(0|0|3)$.

c) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \;=>\; \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$
$x_1 + x_2 + 12x_3 = d$
$0 + 6 + 12 \cdot 2{,}5 = d$ | Punktprobe mit S_1
$d = 36$
$x_1 + x_2 + 12x_3 - 326 = 0$

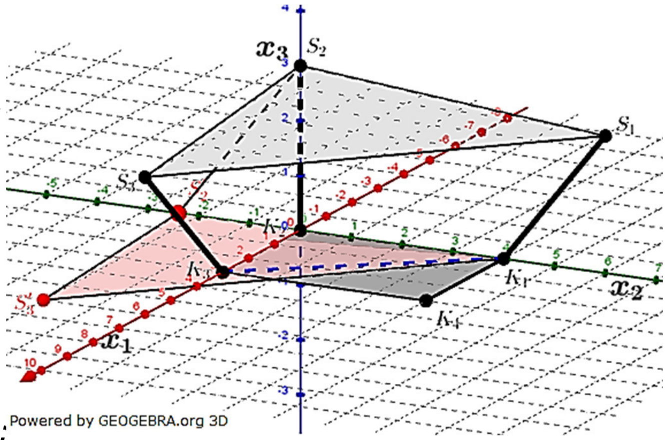
d) *Fläche des Sonnensegels größer als $20\,m^2$:*
$A_{Sonne} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 + 9 + 1296} \approx 18{,}12$
Die Fläche des Sonnensegels beträgt etwa $18\,m^2$, zusätzliche Sicherungsseile der Metallstützen sind nicht erforderlich.

e) *S'_2 auf der x_2-Achse:*
Sowohl die x_1-Koordinate von S_1 als auch die von K_1 sind beide gleich 0. Damit verlaufen Sonnenstrahlen in der x_2x_3-Ebene. Da S_2 auf der x_3-Achse liegt und somit ebenfalls in der x_2x_3-Ebene, muss der projezierte Punkt S'_2 wegen der x_2-Koordinate kleiner 0 des Richtungsvektors $\overrightarrow{S_1K_1}$ auf der x_2-Achse liegen.

f) *Entscheidung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist:*
Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\overrightarrow{S_1K_1}$.

$\overrightarrow{S_1K_1} = \overrightarrow{OK_1} - \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die nebenstehend eingezeichnete rote Fläche $K_1S_3'S_2'$ entspricht dem Schattenbild des Sonnensegels. Die Diagonale $\overline{K_1K_3}$ des Rechtecks teilt dieses in zwei gleich große Flächen. Da die Schattenkante $\overline{K_1S'_3}$ vor dieser Diagonalen liegt, ist der Sandkasten mehr als $50\,\%$ beschattet.



g) *Neigungswinkel des Sonnensegels:*
Dies ist der Schnittwinkel der Ebene des Sonnensegels mit der x_1x_2-Ebene.

$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12}{\sqrt{146} \cdot 1}$

$\varphi = arccos\left(\frac{12}{\sqrt{146}}\right) \approx 6{,}72$

Wegen $\varphi \approx 6{,}7\,° < 8°$, ist das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt.

h) *Volumen der Wassertasche im Sonnensegel.*

$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$

Der gegebenen Graphik entnehmen wir:

$r^2 = 25^2 + (r-5)^2$ | Satz des Pythagoras

$r^2 = 25^2 + r^2 - 10r + 25$

$0 = 650 - 10r$

$r = 65$

Die Kugel hat einen Radius von $65\,cm$. Die Höhe des Wasserstandes ist mit $5\,cm$ angegeben, somit gilt:

$V = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot (3 \cdot 65 - 5) = \frac{25}{3}\pi \cdot 190 \approx 4947{,}18$

Das Volumen der Wassertasche ist etwa $4947\,cm^3$ das entspricht etwa $4{,}95\,l$.