Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 09

Lösung M09B1

a) *Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ von g_a mit der x_1x_2-Ebene:*
Dieser Punkt hat die Koordinate $x_3 = 0$.
$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$4 + r = 0 \;\;=>\;\; r = -4$
$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+8 \\ 0 \end{pmatrix}$
Die Koordinaten sind $S_{x_1x_2}(-6|a+8|0)$.

b) a für Schnittpunkt S_{x_3} von g_a mit der x_3-Achse:
Dieser Punkt hat die Koordinate $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.
$2 + 2r = 0 \;\;=>\;\; r = -1$
$a - 4 - 1 \cdot (-2) = 0$
$a - 4 + 2 = 0 \;\;=>\;\; a = 2$
$\overrightarrow{OS_{x_3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
Die Koordinaten sind $S_{x_3}(0|0|3)$.

c) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \;\;=>\;\; \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$
$x_1 + x_2 + 12x_3 = d$
$0 + 6 + 12 \cdot 2{,}5 = d$ | Punktprobe mit S_1
$d = 36$
$x_1 + x_2 + 12x_3 - 326 = 0$

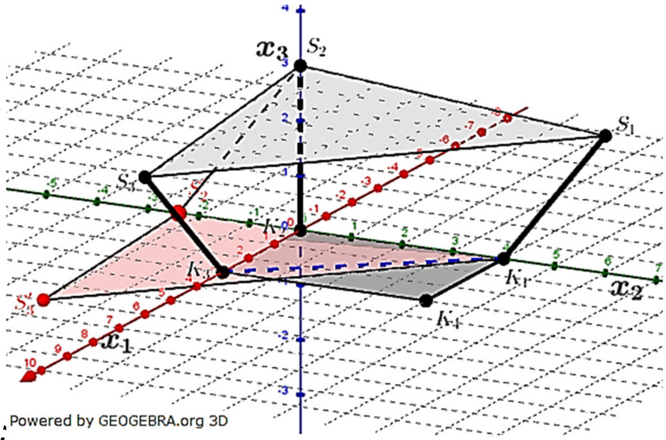
d) *Fläche des Sonnensegels größer als $20\,m^2$:*
$A_{Sonne} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 + 9 + 1296} \approx 18{,}12$
Die Fläche des Sonnensegels beträgt etwa $18\,m^2$, zusätzliche Sicherungsseile der Metallstützen sind nicht erforderlich.

e) *S'_2 auf der x_2-Achse:*
Sowohl die x_1-Koordinate von S_1 als auch die von K_1 sind beide gleich 0. Damit verlaufen Sonnenstrahlen in der x_2x_3-Ebene. Da S_2 auf der x_3-Achse liegt und somit ebenfalls in der x_2x_3-Ebene, muss der projezierte Punkt S'_2 wegen der x_2-Koordinate kleiner 0 des Richtungsvektors $\overrightarrow{S_1K_1}$ auf der x_2-Achse liegen.

f) *Entscheidung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist:*
Richtungsvektor der Sonnenstrahlen $\overrightarrow{S_1K_1}$.

$$\overrightarrow{S_1K_1} = \overrightarrow{OK_1} - \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die nebenstehend eingezeichnete rote Fläche $K_1S_3'S_2'$ entspricht dem Schattenbild des Sonnensegels. Die Diagonale $\overline{K_1K_3}$ des Rechtecks teilt dieses in zwei gleich große Flächen. Da die Schattenkante $\overline{K_1S'_3}$ vor dieser Diagonalen liegt, ist der Sandkasten mehr als $50\ \%$ beschattet.



g) *Neigungswinkel des Sonnensegels:*
Dies ist der Schnittwinkel der Ebene des Sonnensegels mit der x_1x_2-Ebene.

$$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12}{\sqrt{146} \cdot 1}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{12}{\sqrt{146}}\right) \approx 6{,}72$$

Wegen $\varphi \approx 6{,}7\,° < 8°$*, ist das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt.*

h) *Volumen der Wassertasche im Sonnensegel.*

$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$

Der gegebenen Graphik entnehmen wir:

$r^2 = 25^2 + (r-5)^2$ | Satz des Pythagoras

$r^2 = 25^2 + r^2 - 10r + 25$

$0 = 650 - 10r$

$r = 65$

Die Kugel hat einen Radius von $65\ cm$. Die Höhe des Wasserstandes ist mit $5\ cm$ angegeben, somit gilt:

$V = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot (3 \cdot 65 - 5) = \frac{25}{3}\pi \cdot 190 \approx 4947{,}18$

Das Volumen der Wassertasche ist etwa $4947\ cm^3$ *das entspricht etwa* $4{,}95\ l$*.*