Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

Aufgabe M10B1

Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(0|2|2)$ und $C(-1|2|0)$ liegen in der Ebene E.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform und Koordinatenform.

b) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E mit der x_2-Achse an.

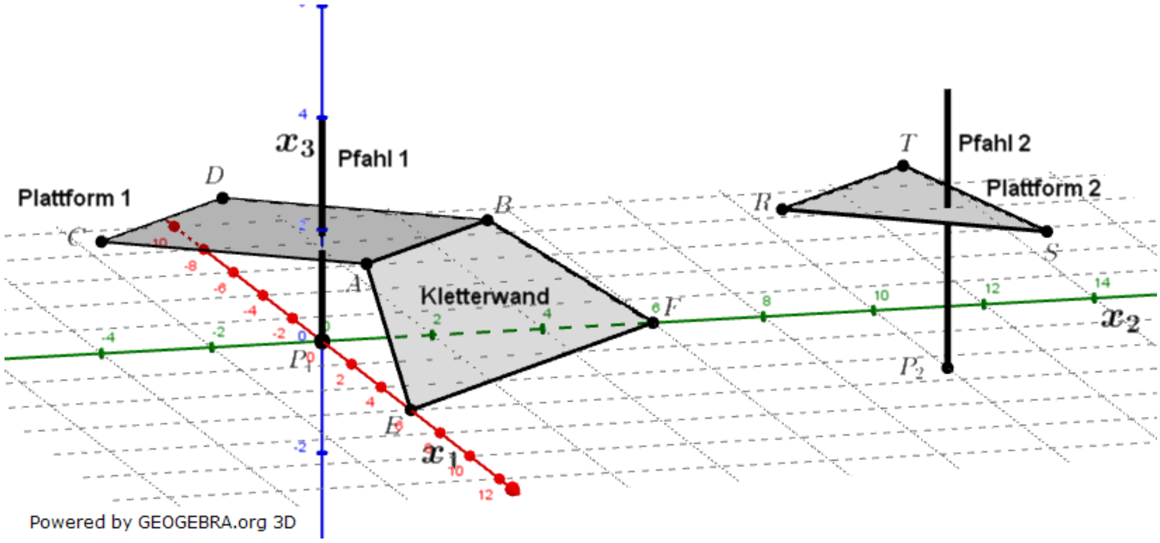
Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$ sowie die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$$

c) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B. Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

d) Ein Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F. Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $\overline{CF}$ im Dreieck ABC an.

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund.
Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht $1\,m$ in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

e) In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das $20\,\%$ länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte.
Berechnen Sie die Länge des Seils.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

f) Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $L\colon\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$)

g) Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

h) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes $1{,}80\,m$. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

i) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes und erläutern Sie Ihren Ansatz.

j) Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $\overline{RT}$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

Lösung M10B1

a) *Gleichung einer Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$E:\ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform:

$$E:\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4 = 0$$

b) *Koordinaten Schnittpunkt von E mit x_2-Achse:*

Dies ist der Spurpunkt S_{x_2}, d.h. $x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$

$$2 \cdot 0_1 + 3x_2 - 0 = 4$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$S_{x_2}\left(0 \left| \frac{4}{3} \right| 0\right)$$

c) *Nachweis des Schnittpunktes F:*

$$h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = t^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \quad -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$-2s - t = 0$

$2t = 4 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

$s + 3t = -5$

$t \to 1$:

$-2s - 2 = 0$

$-2s = 2 \quad \Rightarrow \quad s = -1$

$s; t \to 3$:

$-1 - 2 \cdot 2 = -5$

$t \to h$

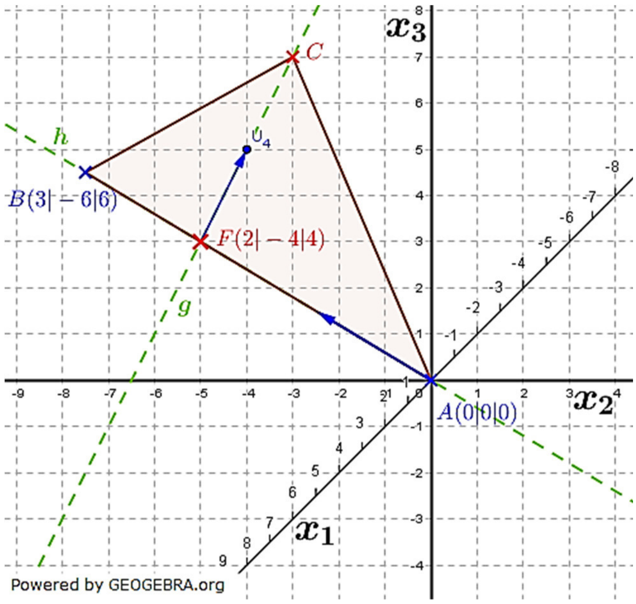
$$\overrightarrow{OF} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g \cap h \text{ in } F$$

$g \perp h$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

d) *Besondere Bedeutung der Strecke $\overline{CF}$ im Dreieck ABC:*
Wegen $g \perp h$ stellt die Strecke $\overline{CF}$ die Höhe auf die Seite AB im Dreieck ABC dar (siehe Graphik rechts).



e) *Länge eines Seils:*
Mittelpunkt Kante AB:
$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Mittelpunkt Kante EF:
$$\overrightarrow{OM_{EF}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}}\right| = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 4} = \sqrt{8{,}5} \approx 2{,}92$$
$$l_{Seil} = 1{,}2 \cdot \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}}\right| = 1{,}2 \cdot 2{,}92 = 3{,}504$$
Das Seil ist etwa $3{,}5\,m$ lang.

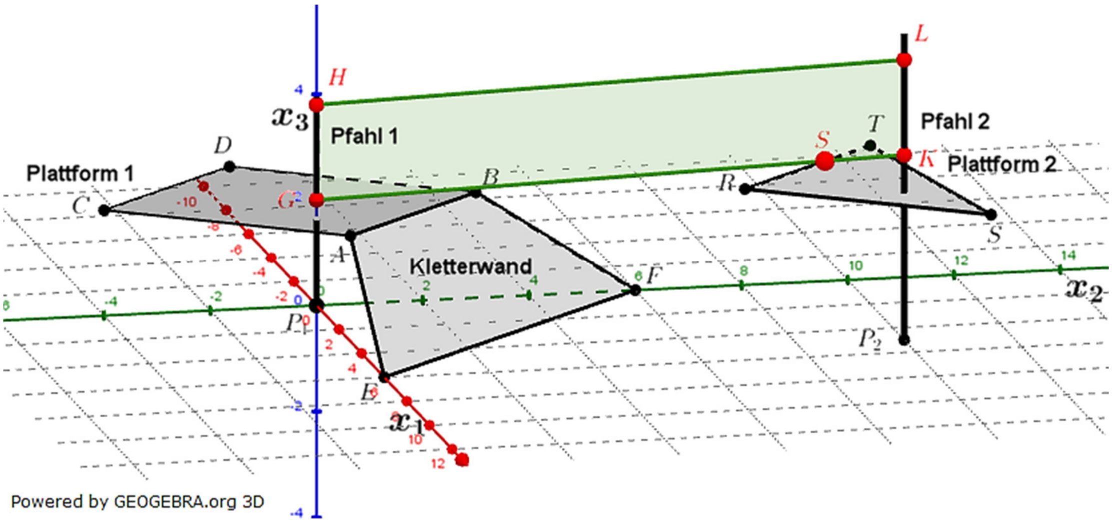
f) *Ebenengleichung von L:*
$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$L:\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = d$
$2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = d$
$d = 12$
$L:\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$

g) *Kletterwand die Form eines Trapezes:*
Es muss gelten:
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF} \ \wedge\ |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{EF}|$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\ \ \overrightarrow{AB} = \sqrt{18};\ \ \overrightarrow{EF} = \sqrt{72}$$
Wegen $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ ist $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.
Das Viereck $ABFE$ ist ein Trapez.

h) *Winkel, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt:*
Schnittwinkel zwischen Ebene L und der x_1x_2-Ebene.
$$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{17} \cdot 1}$$
$$\varphi = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) \approx 43{,}31$$
Die Kletterwand schließt mit dem Untergrund einen Winkel von etwa $43{,}3\,°$ ein.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

i) *Flächeninhalt eines Netzes:*



Die obige Graphik verdeutlicht die Situation. Das Netz wird durch die Punkte G, H, L und K aufgespannt. Die Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{KL}$ sind gleich lang und parallel. Deshalb sind auch die Strecken $\overline{GK}$ und $\overline{HL}$ gleich lang und parallel. Das Viereck ist also ein Parallelogramm.
Die Fläche eines Parallelogramms errechnet sich aus $A = g \cdot h_g$, wobei die Höhe h_g senkrecht auf g steht.
In diesem Falle ist $\overline{GH}$ (oder $\overline{KL}$) die Grundseite und der Abstand der beiden Pfähle die Höhe h_g.

$\overline{GH} = 1{,}8\,m$ (laut Aufgabenstellung)

$$h_g = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{125} \approx 11{,}18\,m$$

$A_{Trapez} = 1{,}8 \cdot 11{,}2 = 20{,}16$

Die Fläche des Netzes beträgt etwa $20{,}2\,m^2$.

j) *Abstand eines Eckpunktes von der Plattform 2:*
Die Situation ist in der oberen Graphik durch den Punkt S gekennzeichnet. S ist der Schnittpunkt der Geraden durch R und T sowie G und K. Die Gerade durch G und K ist gegeben mit:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}$$

Gerade durch R und T:

$$h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$s\cdot\begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}-t\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

I) $5s+3t=2$

II) $10s-3t=10$

III) $s(h-2)=1$

I)+II) $15s=12$

$s=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

$s \to II$:

$10\cdot\frac{4}{5}-3t=7$

$-3t=-1$

$t=\frac{1}{3}$

$s \to III)$:

III) $\frac{4}{5}\cdot(h-2)=1$

$\frac{4}{5}h-\frac{8}{5}=1$

$4h-8=5$

$4h=13$

$h=\frac{13}{4}\approx 3{,}25$

Der untere Eckpunkt des Netzes ist in $3{,}25\ m$ Höhe von Pfahl 2 befestigt.