Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

Lösung M10B1

a) *Gleichung einer Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$E:\ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right) \circ \overrightarrow{n_E} = 0$$

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform:

$$E:\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4 = 0$$

b) *Koordinaten Schnittpunkt von E mit x_2-Achse:*

Dies ist der Spurpunkt S_{x_2}, d.h. $x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$

$$2 \cdot 0_1 + 3x_2 - 0 = 4$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$S_{x_2}\left(0 \left| \frac{4}{3} \right| 0\right)$$

c) *Nachweis des Schnittpunktes F:*

$$h:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = t^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \quad -t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\ -\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-2s - t = 0$$

$$2t = 4 \Rightarrow t = 2$$

$$s + 3t = -5$$

$t \to 1$:

$$-2s - 2 = 0$$

$$-2s = 2 \Rightarrow s = -1$$

$s; t \to 3$:

$$-1 - 2 \cdot 2 = -5$$

$t \to h$

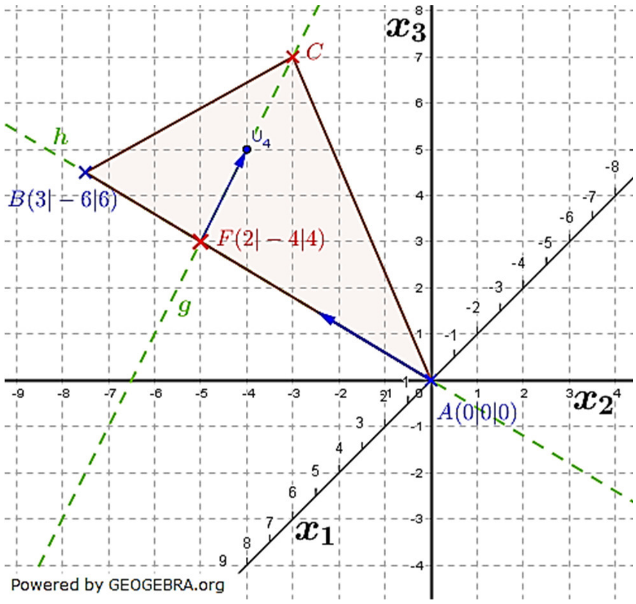
$$\overrightarrow{OF} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow g \cap h \text{ in } F$$

$g \perp h$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

d) *Besondere Bedeutung der Strecke $\overline{CF}$ im Dreieck ABC:*
Wegen $g \perp h$ stellt die Strecke $\overline{CF}$ die Höhe auf die Seite AB im Dreieck ABC dar (siehe Graphik rechts).



e) *Länge eines Seils:*
Mittelpunkt Kante AB:
$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Mittelpunkt Kante EF:
$$\overrightarrow{OM_{EF}} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}}\right| = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25 + 4} = \sqrt{8{,}5} \approx 2{,}92$$
$$l_{Seil} = 1{,}2 \cdot \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{EF}}\right| = 1{,}2 \cdot 2{,}92 = 3{,}504$$
Das Seil ist etwa $3{,}5\,m$ lang.

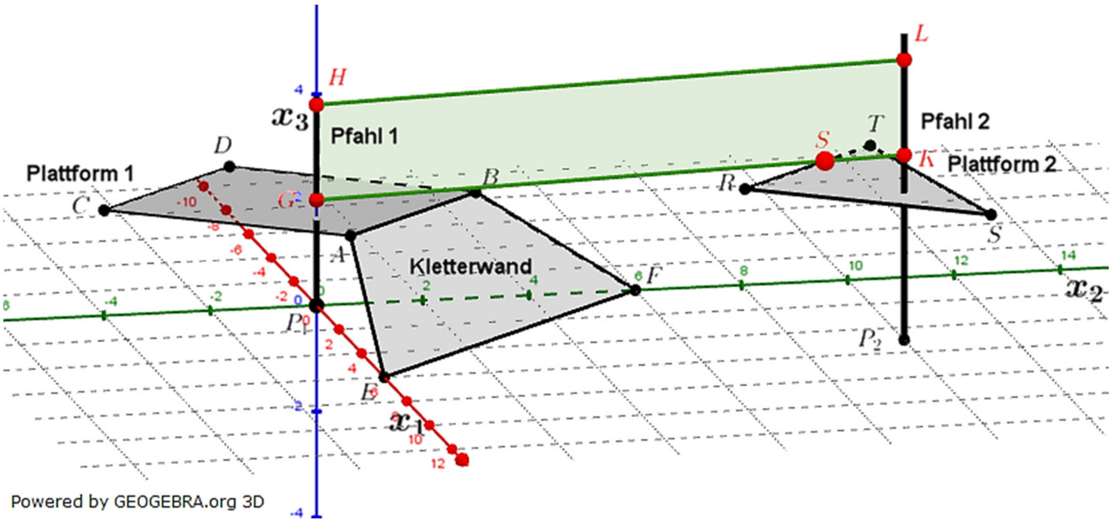
f) *Ebenengleichung von L:*
$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
L: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = d$
$2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = d$
$d = 12$
L: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$

g) *Kletterwand die Form eines Trapezes:*
Es muss gelten:
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF} \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{EF}|$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{AB} = \sqrt{18};\quad \overrightarrow{EF} = \sqrt{72}$$
Wegen $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ ist $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.
Das Viereck $ABFE$ ist ein Trapez.

h) *Winkel, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt:*
Schnittwinkel zwischen Ebene L und der x_1x_2-Ebene.
$$cos(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{17} \cdot 1}$$
$$\varphi = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) \approx 43{,}31$$
Die Kletterwand schließt mit dem Untergrund einen Winkel von etwa $43{,}3\,°$ ein.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

i) *Flächeninhalt eines Netzes:*



Die obige Graphik verdeutlicht die Situation. Das Netz wird durch die Punkte G, H, L und K aufgespannt. Die Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{KL}$ sind gleich lang und parallel. Deshalb sind auch die Strecken $\overline{GK}$ und $\overline{HL}$ gleich lang und parallel. Das Viereck ist also ein Parallelogramm.
Die Fläche eines Parallelogramms errechnet sich aus $A = g \cdot h_g$, wobei die Höhe h_g senkrecht auf g steht.
In diesem Falle ist $\overline{GH}$ (oder $\overline{KL}$) die Grundseite und der Abstand der beiden Pfähle die Höhe h_g.

$\overline{GH} = 1{,}8\,m$ (laut Aufgabenstellung)

$$h_g = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{125} \approx 11{,}18\,m$$

$A_{Trapez} = 1{,}8 \cdot 11{,}2 = 20{,}16$

Die Fläche des Netzes beträgt etwa $20{,}2\,m^2$.

j) *Abstand eines Eckpunktes von der Plattform 2:*
Die Situation ist in der oberen Graphik durch den Punkt S gekennzeichnet. S ist der Schnittpunkt der Geraden durch R und T sowie G und K. Die Gerade durch G und K ist gegeben mit:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}$$

Gerade durch R und T:

$$h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 10

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

I) $5s + 3t = 2$

II) $10s - 3t = 10$

III) $s(h-2) = 1$

I)+II) $15s = 12$

$s = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$s \rightarrow II$:

$10 \cdot \frac{4}{5} - 3t = 7$

$-3t = -1$

$t = \frac{1}{3}$

$s \rightarrow III)$:

III) $\frac{4}{5} \cdot (h-2) = 1$

$\frac{4}{5}h - \frac{8}{5} = 1$

$4h - 8 = 5$

$4h = 13$

$h = \frac{13}{4} \approx 3{,}25$

Der untere Eckpunkt des Netzes ist in $3{,}25\,m$ *Höhe von Pfahl 2 befestigt.*