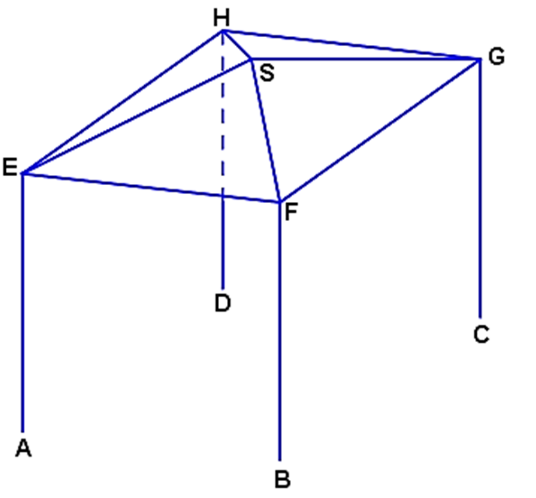
Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

Aufgabe M11B1

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier $4{,}50\,m$ langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|-0{,}5)$, B, C und $D(-3|-2|-0{,}5)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und $H(-3|-2|4)$ dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht $1\,m$ in der Wirklichkeit.



a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

b) An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

c) Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von $2{,}10\,m$ verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von $3{,}50\,m$ über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Berechnen Sie das Verhältnis der Längen dieser beiden Abschnitte.

d) Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch die Strecke AE dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch die Strecke BF dargestellt wird.
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

Aufgabe M11B2

Gegeben sind die Punkte $A(6|1|0)$, $B(4|5|-4)$ und $C(-2|8|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks $54\,FE$ beträgt.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$)

b) Es gibt Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$, die das Volumen $108\,VE$ haben.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze einer solchen Pyramide.

c) Ein Teil der Fläche des Rechtecks $ABCD$ befindet sich unterhalb der x_1x_2-Ebene. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Teilfläche.

Lösung M11B1

a) *Das Viereck $EFGH$ ist ein Quadrat, wenn gilt:*

$$|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{FG}| \wedge \overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = 0$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-(-3) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{26} = |\overrightarrow{FG}|$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatengleichung der Ebene L:

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$L\colon\ 5x_1 - x_2 + 13x_3 = d$$

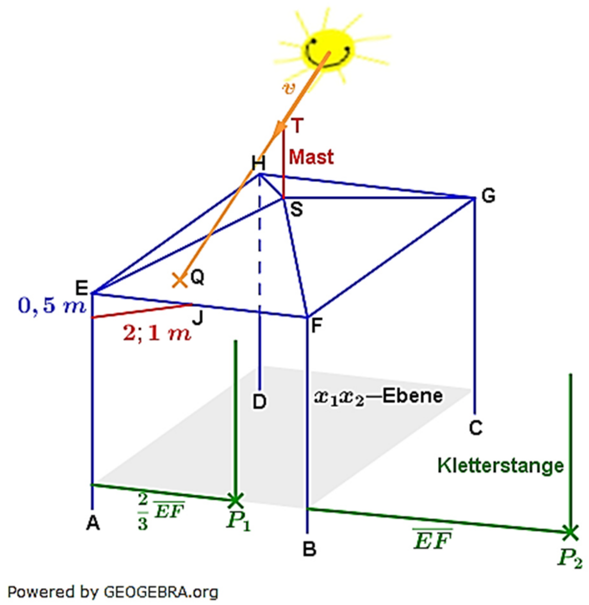
$$5 \cdot 2 + 3 + 13 \cdot 4 = d$$

$$d = 65$$

$$L\colon\ 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$$

b) *Länge des Schattens:*

Man berechnet die Koordinaten eines Schnittpunkts Q der Ebene L und der Geraden, die durch den Punkt T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SQ}$ ist die Länge des Schattens in Metern.



c) *Berechnung Längenverhältnis:*

Gesucht ist das Verhältnis $\frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}}$.

$\overline{EJ}$: $\quad \overline{EJ} = \sqrt{2{,}1^2 - 0{,}5^2} = 2{,}04$

$\overline{JF}$: $\quad |\overrightarrow{EF}| - \overline{EJ} = \sqrt{26} - 2{,}04 = 3{,}06$

$\frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}}$: $\quad \frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}} = \frac{2{,}04}{3{,}06} \approx \frac{2}{3}$

Das Verhältnis der beiden Längenabschnitte beträgt $2:3$.

d) *Fußpunkte von Kletterstangen:*

P_1 liegt $\frac{2}{3}$ der Strecke $|\overrightarrow{EF}|$ vom Pfosten AE und $\frac{1}{3}$ der Strecke $|\overrightarrow{EF}|$ vom Posten BF entfernt, das Verhältnis ist somit $2:1$.

P_2 liegt 2 mal die Strecke $|\overrightarrow{EF}|$ vom Pfosten AE und 1 mal die Strecke $|\overrightarrow{EF}|$ vom Posten BF entfernt, das Verhältnis ist somit auch $2:1$.

Zu beachten ist, dass P_1 und P_2 die x_3-Koordinate 0 besitzen. Die angegebenen Strecken sind somit von einem Punkt $E'(2|-3|0)$ aus zu berechnen.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OE'} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OE'} + 2 \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $P_1\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|0\right)$ *und* $P_2(4|6|0)$.

Lösung M11B2

a) *Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC:*

Das Dreieck ABC ist bei B rechtwinklig wenn gilt:

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 5-1 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 0$

Koordinatengleichung von E:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

Punkt $A \to E$:

$2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 0 = d$ ➔ $d = 14$

$E: \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$

Punkt D für ein Viereck $ABCD$ als Rechteck:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $D(0|4|6)$.

Flächeninhalt dieses Rechtecks:

$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16+16} \cdot \sqrt{36+9+36} = \sqrt{2916} = 54$

Alternativ:

$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36^2 + 36^2 + 18^2} = 54$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

b) *Koordinaten der Spitze einer Pyramide:*

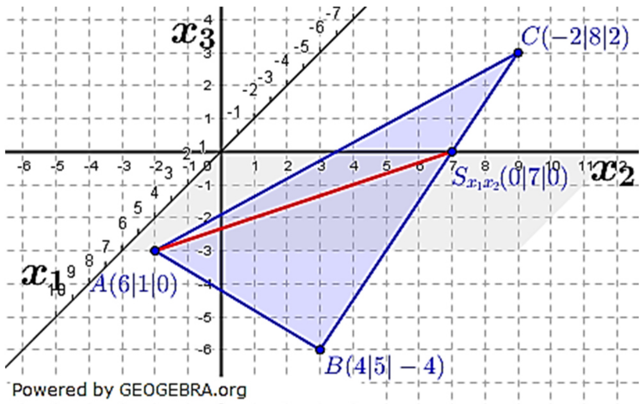
$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit $G = 54\,FE$ ➔ $\frac{1}{3} \cdot 54 \cdot h = 108$ ➔ $h = 6$

Die Spitze der Pyramide liegt somit $6\,LE$ in Richtung des Normalenvektors von E in „+"- alternativ „−"-Richtung von der Ebene entfernt. Eine der unendlich vielen Lösungen ist z.B. eine Spitze senkrecht über dem Punkt A.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \pm \frac{6}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{6}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) *Inhalt einer Teilfläche:*



Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Der Punkt A liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Punkt B liegt unterhalb der, der Punkt C oberhalb der x_1x_2-Ebene. Der Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ der Geraden durch B und C mit der x_1x_2-Ebene ist der Eckpunkt des Dreiecks $ABS_{x_1x_2}$, das unterhalb der x_1x_2-Ebene verläuft.

Gerade durch B und C:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ der Geraden durch B und C mit der x_1x_2-Ebene:

$x_3 = -4 + 3r = 0$

$3r = 4$ ➔ $r = \frac{4}{3}$

$$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fläche des Dreiecks $ABS_{x_1x_2}$:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BS_{x_1x_2}}|$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\overrightarrow{BS_{x_1x_2}}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$

Der Inhalt des Teildreiecks beträgt $18\,FE$.