Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

Lösung M11B1

a) *Das Viereck $EFGH$ ist ein Quadrat, wenn gilt:*

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\overrightarrow{FG}\right| \wedge \overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = 0$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-(-3) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{26} = \left|\overrightarrow{FG}\right|$$

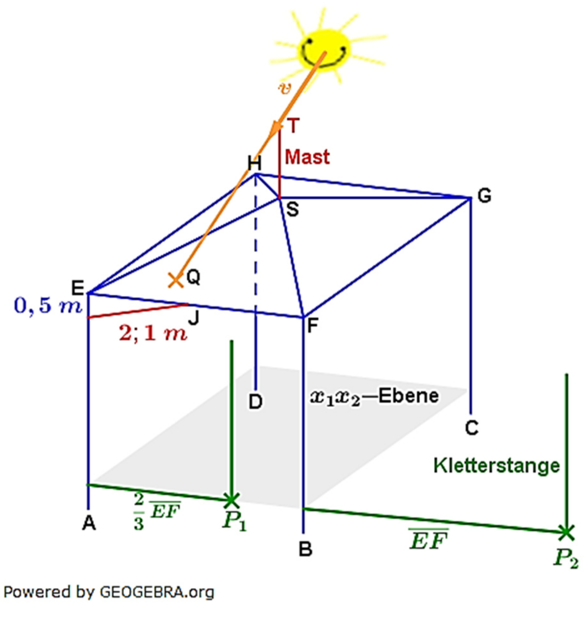
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatengleichung der Ebene L:

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$L\colon\ 5x_1 - x_2 + 13x_3 = d$$
$$5 \cdot 2 + 3 + 13 \cdot 4 = d$$
$$d = 65$$
$$L\colon\ 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$$

b) *Länge des Schattens:*
Man berechnet die Koordinaten eines Schnittpunkts Q der Ebene L und der Geraden, die durch den Punkt T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SQ}$ ist die Länge des Schattens in Metern.



c) *Berechnung Längenverhältnis:*
Gesucht ist das Verhältnis $\frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}}$.

$\overline{EJ}$: $\quad \overline{EJ} = \sqrt{2{,}1^2 - 0{,}5^2} = 2{,}04$

$\overline{JF}$: $\quad \left|\overrightarrow{EF}\right| - \overline{EJ} = \sqrt{26} - 2{,}04 = 3{,}06$

$\frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}}$: $\quad \frac{\overline{EJ}}{\overline{JF}} = \frac{2{,}04}{3{,}06} \approx \frac{2}{3}$

Das Verhältnis der beiden Längenabschnitte beträgt $2\colon 3$.

d) *Fußpunkte von Kletterstangen:*
P_1 liegt $\frac{2}{3}$ der Strecke $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ vom Pfosten AE und $\frac{1}{3}$ der Strecke $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ vom Posten BF entfernt, das Verhältnis ist somit $2\colon 1$.
P_2 liegt 2 mal die Strecke $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ vom Pfosten AE und 1 mal die Strecke $\left|\overrightarrow{EF}\right|$ vom Posten BF entfernt, das Verhältnis ist somit auch $2\colon 1$.
Zu beachten ist, dass P_1 und P_2 die x_3-Koordinate 0 besitzen. Die angegebenen Strecken sind somit von einem Punkt $E'(2|-3|0)$ aus zu berechnen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OE'} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OE'} + 2 \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $P_1\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\middle|0\right)$ *und* $P_2(4|6|0)$.

Lösung M11B2

a) *Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC:*

Das Dreieck ABC ist bei B rechtwinklig wenn gilt:

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 5-1 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ 8-5 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 0$

Koordinatengleichung von E:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

Punkt $A \to E$:

$2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 0 = d$ ➔ $d = 14$

$E: \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$

Punkt D für ein Viereck $ABCD$ als Rechteck:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $D(0|4|6)$.

Flächeninhalt dieses Rechtecks:

$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16+16} \cdot \sqrt{36+9+36} = \sqrt{2916} = 54$

Alternativ:

$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36^2 + 36^2 + 18^2} = 54$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 11

b) *Koordinaten der Spitze einer Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ mit $G = 54\,FE$ ➔ $\frac{1}{3} \cdot 54 \cdot h = 108$ ➔ $h = 6$

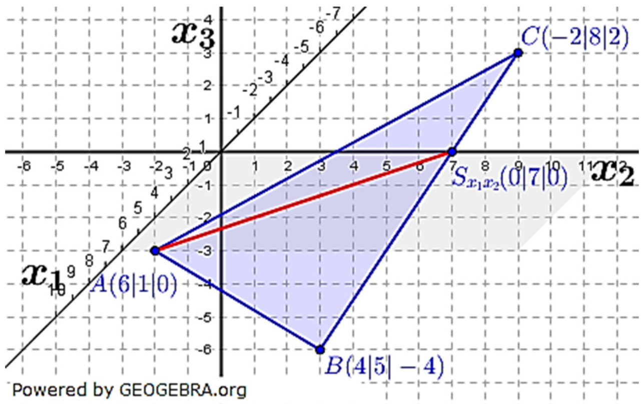
Die Spitze der Pyramide liegt somit $6\,LE$ in Richtung des Normalenvektors von E in „+"- alternativ „−"-Richtung von der Ebene entfernt. Eine der unendlich vielen Lösungen ist z.B. eine Spitze senkrecht über dem Punkt A.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} \pm \frac{6}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{6}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) *Inhalt einer Teilfläche:*

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Der Punkt A liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Punkt B liegt unterhalb der, der Punkt C oberhalb der x_1x_2-Ebene. Der Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ der Geraden durch B und C mit der x_1x_2-Ebene ist der Eckpunkt des Dreiecks $ABS_{x_1x_2}$, das unterhalb der x_1x_2-Ebene verläuft.



Gerade durch B und C:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt $S_{x_1x_2}$ der Geraden durch B und C mit der x_1x_2-Ebene:

$x_3 = -4 + 3r = 0$

$3r = 4$ ➔ $r = \frac{4}{3}$

$$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fläche des Dreiecks $ABS_{x_1x_2}$:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BS_{x_1x_2}}|$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\overrightarrow{BS_{x_1x_2}}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$

Der Inhalt des Teildreiecks beträgt $18\,FE$.

© **by Fit-in-Mathe-Online**, **mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium**
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de