

Lösung M01

Lösungslogik

Berechnung der Extrempunkte über $f'(x) = 0$ und Prüfung auf Extrempunkt mit $f''(x) \neq 0$. Ein Punkt hat stets zwei Koordinaten, sodass wir abschließend noch $f(x)$ bilden müssen.

Klausuraufschrieb

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$$

$$2e^{2x} - e^{-x} = 0$$

$$2e^{3x} - 1 = 0$$

$$2e^{3x} = 1$$

$$e^{3x} = \frac{1}{2}$$

$$3x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln(2)$$

$$f''\left(-\frac{1}{3} \ln(2)\right) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f\left(-\frac{1}{3} \ln(2)\right) = e^{2\left(-\frac{1}{3} \ln(2)\right)} + e^{+\frac{1}{3} \ln(2)}$$

$$f\left(-\frac{1}{3} \ln(2)\right) = 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$$

Der Extrempunkt (Tiefpunkt) des Funktionsgraphen hat die Koordinaten $P\left(-\frac{1}{3} \ln(2) \mid \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right)$.

Lösung M02

Lösungslogik

Berechnung des Wendepunktes über $f''(x) = 0$ und Prüfung, dass $f'''(x) \neq 0$ ist. Ein Punkt hat stets zwei Koordinaten, sodass wir abschließend noch $f(x)$ bilden müssen.

Klausuraufschrieb

$$f(x) = (x-1) \cdot e^x$$

Produktregel erforderlich

$$u = x - 1$$

$$u' = 1$$

$$v = e^x$$

$$v' = e^x$$

$$f'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

$$f''(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1+x)$$

$$f'''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (x+2)$$

$$f''(x) = 0:$$

$$e^x \cdot (1+x) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$e^x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f'''(-1) = e^{-1}(-1+2) > 0$$

$$f(-1) = -2 \cdot e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP\left(-1 \mid -\frac{2}{e}\right)$.

Lösung M03

Lösungslogik

- a) Normalengleichung über Punkt-Steigungsformel
 $n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ mit $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$ (wegen gegebenem Punkt $P(-1|2e)$).
- b) Schnittpunkt der Normalen mit der x -Achse mit $n(x) = 0$.

Klausuraufschrieb

- a) $n(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
 Wegen $P(-1|2e)$ ist $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$
 $f'(x) = -2e^{-x}$
 $f'(-1) = -2e$
 $n(x) = -\frac{1}{-2e} \cdot (x + 1) + 2e$
 $n(x) = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e$
- b) $n(x) = 0$
 $\frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e = 0 \quad | \quad \cdot 2e$
 $x + 1 + 4e^2 = 0$
 $x = -4e^2 - 1$

Lösung M04

Klausuraufschrieb

- a) Der Graph der Funktion weist eine waagrechte Asymptote $y = 3$ auf.
 Daraus folgt: $b = 3$.
 $P(0|2) \in f$
 $f(0) = 2 = a \cdot e^0 + 3$
 $a = -1$
 $f(x) = -e^x + 3$
- b) $f'(x) = -e^x$
 $f'(x) = -1 = -e^x$
 $e^x = 1$
 $x = \ln(1) = 0$
 An der Stelle $x = 0$ besitzt der Funktionsgraph die Steigung $m = -1$.

Lösung M05

Lösungslogik

- a) Wir betrachten das globale Verhalten von f .
b) Wir setzen $f'(x) = g'(x)$ und lösen die Gleichung nach x auf.

Klausuraufschrieb

- a) Wegen $\lim_{x \rightarrow |\infty|} \frac{1}{1-x} = 0$ ist $\lim_{x \rightarrow |\infty|} f(x) = 3$.
 f hat die waagrechte Asymptote $y = 3$.

b) $f'(x) = g'(x)$:
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(1-x)^2 = (1+x)^2 \Rightarrow x = 0$$

f und g haben bei $x_0 = 0$ dieselbe Steigung.

Lösung M06

Lösungslogik

- a) Für die Skizze ermitteln wir die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extremstellen und Wendepunkte und betrachten das globale Verhalten.
b) Gleichung der Tangente über die Punkt-Steigungs-Formel mit:
 $t(x) = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$.

Klausuraufschrieb

- a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$e^{-x-1} + 1 = 0$$

$e^{-x-1} = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\},$ d.h., der Funktionsgraph hat keine Nullstellen.

$$f(0) = e^{-1} + 1 = 1 + \frac{1}{e}$$

Der Funktionsgraph schneidet die y -Achse in $S_y\left(0 \mid 1 + \frac{1}{e}\right)$.

Extremstellen:

$$f'(x) = -e^{-x-1}$$

$-e^{-x-1} = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\},$ d.h., der Funktionsgraph besitzt keine Extremstellen.

Globales Verhalten:

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x-1} = 0$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow \infty$.

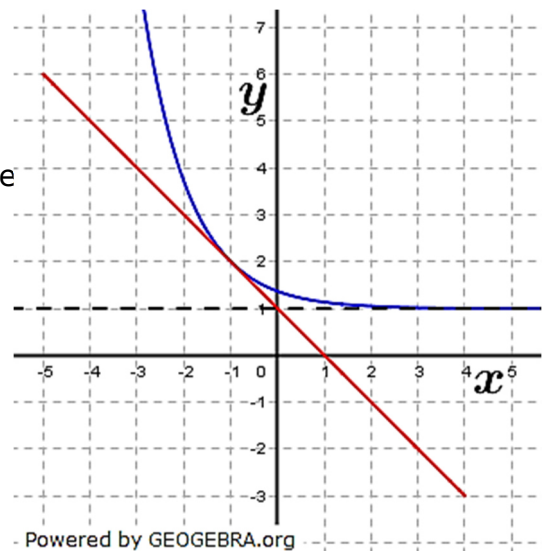
- b) $t(x) = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1)$

$$f(-1) = 2$$

$$f'(-1) = -e^0 = -1$$

$$t(x) = -1 \cdot (x + 1) + 2$$

$$t(x) = -x + 1$$



Lösung M07

Klausuraufschrieb

a) $f'(1,5)$:

$$f(x) = 2 \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(1,5) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 1,5 + 1}} = 1$$

b) $f'(x) = 1$

$$\frac{2}{\sqrt{2x+1}} = 1$$

$$2 = 1 \cdot \sqrt{2x+1}$$

$$4 = (2x + 1)$$

$$2x + 1 = 4$$

$$2x = 3$$

$$x = 1,5$$

c) $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$$f'(0) = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$

$$f(0) = 2 \cdot \sqrt{1} = 2$$

$$t(x) = 2x + 2$$

Lösung M08

Klausuraufschrieb

a) $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

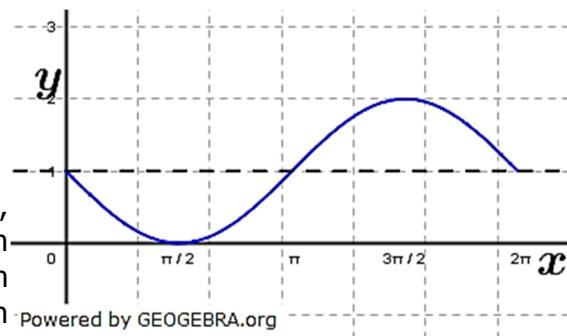
b) $f'(\pi)$:

$$f'(x) = -\cos(x)$$

$$f'(\pi) = -\cos(\pi) = 1$$

c) Aus der Skizze erkennen wir, dass der Funktionsgraph um nach links verschoben werden muss, damit dieser durch den Ursprung verläuft.

$$c = \frac{\pi}{2}$$



Lösung M09

Lösungslogik

- a) Neben den Nullstellen ermitteln wir noch die Extremstellen, um eine Skizze anfertigen zu können.
- b) Wir bilden den Betrag des Integrals über f in den Grenzen der beiden Nullstellen.

Klausuraufschrieb

a) $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) = 0 \text{ Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 0$$

$$x_3 = 4$$

Die beiden Nullstellen sind $N_1(0|0)$ (doppelte Nullstelle) und $N_2(4|0)$.

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x; \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$$

$$\frac{3}{4}x^2 - 2x = x \cdot \left(\frac{3}{4}x - 2\right) \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

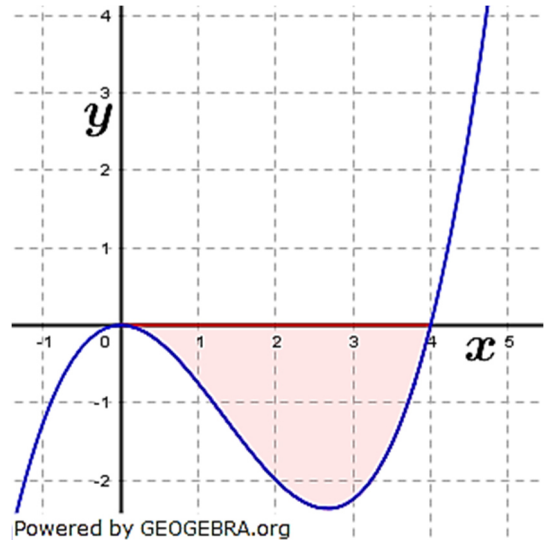
$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''\left(\frac{8}{3}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2\right) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{256}{16} - \frac{64}{3} \right| = \left| 16 - \frac{64}{3} \right| \\ &= \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Die eingeschlossene Fläche ist $\frac{16}{3}$ FE groß.



Lösung M10

Lösungslogik

Wir skizzieren zunächst die Situation und berechnen danach das Integral.

Klausuraufschrieb

$f(x) = (x - 4)^2$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|0)$.

Tangente über $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$$f'(x) = 2x - 8$$

$$f'(0) = -8; \quad f(0) = 16$$

$$t(x) = -8x + 16$$

Gesucht wird die grüne Fläche.

$$A = \int_0^4 f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx$$

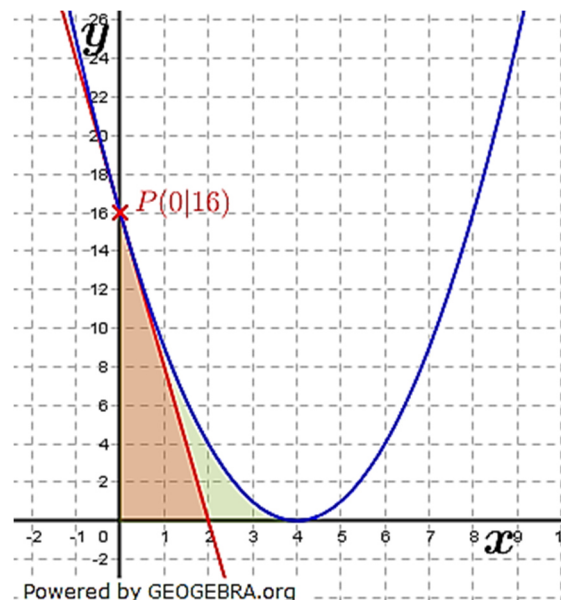
$$A = \int_0^4 (x - 4)^2 dx - \int_0^2 (-8x + 16) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}(x - 4)^3 \right]_0^4 - [-4x^2 + 16x]_0^2$$

$$A = \frac{1}{3}(4 - 4)^3 - \frac{1}{3}(-4)^3 + 4 \cdot 2^2 - 32$$

$$A = \frac{64}{3} + 16 - 32 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$$

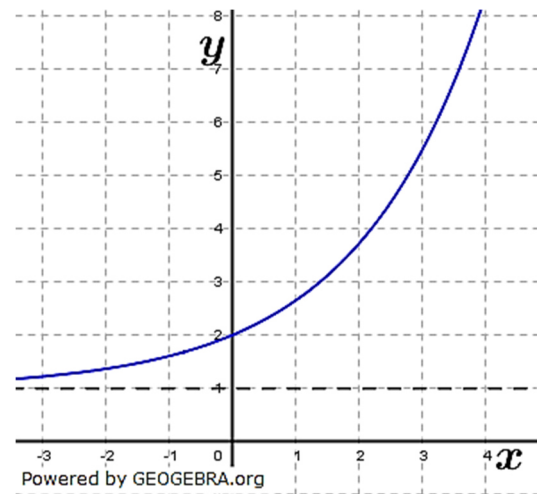
Die gesuchte Fläche ist $\frac{16}{3}$ FE groß.



Lösung M11

Klausuraufschrift

- a) Schnittpunkt y -Achse:
 $S_y(0|3)$
 Schnittpunkt x -Achse:
 keine
 waagrechte Asymptote:
 $y = 1$
- b) $f'(x) = 2$:
 $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$
 $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = 2$
 $e^{\frac{1}{2}x} = 4$
 $\frac{1}{2}x = \ln(4)$
 $x = 2 \cdot \ln(4)$



Der Funktionsgraph hat an der Stelle $x_0 = 2\ln(4)$ die Steigung $m = 2$.

Lösung M12

Lösungslogik

- a) Hochpunkt von f über $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.
- b) Normale über Punkt-Steigungsformel $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$.

Klausuraufschrift

- a) $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$
1. Ableitung mittels Produktregel:
- | | |
|--------------|----------------|
| $u = x + 2$ | $u' = 1$ |
| $v = e^{-x}$ | $v' = -e^{-x}$ |
- $f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x + 2) = e^{-x} \cdot (1 - x - 2) = e^{-x} \cdot (-x - 1)$
 $f''(x) = -e^{-x}(-x - 1) - e^{-x} = e^{-x}(x + 1 - 1) = x \cdot e^{-x}$
 $f'(x) = 0$:
 $e^{-x} \cdot (-x - 1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $e^{-x} = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$
 $-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $f''(-1) = -1 \cdot e < 0$ | Hochpunkt
 $f(-1) = (-1 + 2) \cdot e^1 = e$
 Die Koordinaten des Hochpunktes sind $HP(-1|e)$
- b) $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$
 $f'(1) = -2e^{-1}$
 $f(1) = (1 + 2) \cdot e^{-1} = 3e^{-1}$
 $n(x) = -\frac{1}{-2e^{-1}} \cdot (x - 1) + 3e^{-1}$
 $n(x) = \frac{1}{2}ex - \frac{1}{2}e + \frac{3}{e}$

Lösung M13

- (1) $f(1) = F(1)$
Der Funktionswert $F(1) = 0$. Bei 1 ist ein Tiefpunkt, somit ist auch die erste Ableitung $f(1) = 0$. Die Aussage stimmt.
- (2) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.
 F hat im angegebenen Intervall einen Wendepunkt. Wendepunkte führen in der ersten Ableitung zu einer Extremstelle, diese Extremstelle wird in der zweiten Ableitung zu einer Nullstelle. Die Aussage stimmt.
- (3) $f(F(-2)) > 0$
 $F(-2) = 0$, damit ist $f(0)$ zu bestimmen. Das Schaubild hat bei $x_0 = 0$ negative Steigung, damit ist $f(0) < 0$, die Aussage ist falsch.