Aufgabe M01

Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M02

Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion f mit $f(x) = (x-1) \cdot e^{x}$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen von f im Punkt $P(-1|2e)$.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

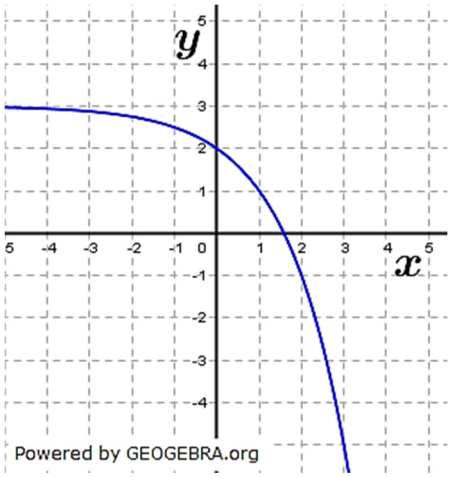
Aufgabe M04

Die Funktion f hat das nebenstehende Schaubild und die Funktionsgleichung
$f(x) = a \cdot e^{x} + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Werte von a und b.

b) Berechnen Sie, an welcher Stelle die Funktion f die Steigung $m = -1$ besitzt.

(Quelle Landesbildungsserver BW)



Aufgabe M05

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{1-x} + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{1+x}$.

a) Geben Sie die waagrechte Asymptote der Funktion f an.

b) Bestimmen Sie die Stelle, an der f und g die gleiche Steigung haben.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M06

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x-1} + 1$.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = -1$ und zeichnen Sie die Tangente ein.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M07

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$.

a) Berechnen Sie die Steigung von f an der Stelle $x_0 = 1{,}5$.

b) Berechnen Sie die Stelle, an der die Funktion f die Steigung $m = 1$ hat.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0 = 0$.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe M08

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -sin(x) + 1$.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Bestimmen Sie die Steigung von f an der Stelle $x_0 = \pi$.

c) Bestimmen Sie c so, dass der Ursprung auf dem Schaubild von $g(x) = f(x + c)$ liegt.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M09

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

b) Vom Graphen und der x-Achse wird ein Flächenstück begrenzt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Aufgabe M10

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x - 4)^2$, der Tangente t_0 im Punkt $P(0|f(0))$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe M11

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 + e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem die Tangente an den Graphen parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 3$ ist.

Aufgabe M12

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von f.

b) Der Funktionsgraph hat im Punkt $P(1|f(1))$ die Normale n.
Ermitteln Sie eine Gleichung von n.

Aufgabe M13

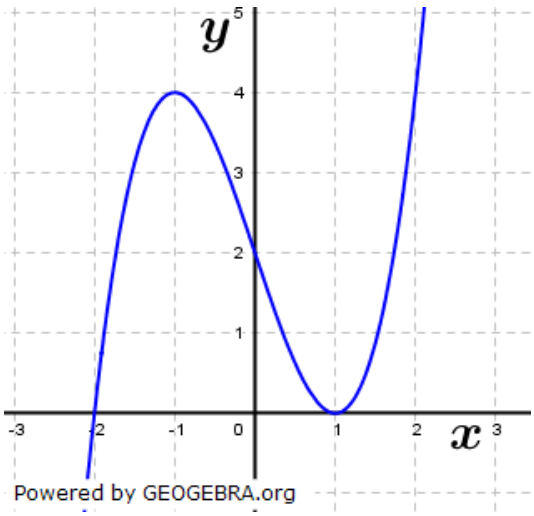
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$.

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(3) $f(F(-2)) > 0$.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)



Lösung M01

Lösungslogik

Berechnung der Extrempunkte über $f'(x) = 0$ und Prüfung auf Extrempunkt mit $f''(x) \neq 0$. Ein Punkt hat stets zwei Koordinaten, sodass wir abschließend noch $f(x)$ bilden müssen.

Klausuraufschrieb

$f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$

$f''(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$ | f'' immer größer als Null

$2e^{2x} - e^{-x} = 0$ | $\cdot e^x$

$2e^{3x} - 1 = 0$

$2e^{3x} = 1$ | $:2$

$e^{3x} = \frac{1}{2}$ | ln

$3x = ln\left(\frac{1}{2}\right)$ | $:3$

$x = \frac{1}{3} ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} ln\,(2)$

$f''\left(-\frac{1}{3} ln(2)\right) > 0$ => Tiefpunkt

$f\left(-\frac{1}{3} ln\,(2)\right) = e^{2\left(-\frac{1}{3} ln(2)\right)} + e^{+\frac{1}{3} ln(2)}$

$f\left(-\frac{1}{3} ln\,(2)\right) = 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}$

Der Extrempunkt (Tiefpunkt) des Funktionsgraphen hat die Koordinaten $P\left(-\frac{1}{3} ln(2) \middle| \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}\right)$.

Lösung M02

Lösungslogik

Berechnung des Wendepunktes über $f''(x) = 0$ und Prüfung, dass $f'''(x) \neq 0$ ist. Ein Punkt hat stets zwei Koordinaten, sodass wir abschließend noch $f(x)$ bilden müssen.

Klausuraufschrieb

$f(x) = (x-1) \cdot e^x$ Produktregel erforderlich

$u = x - 1$ $u' = 1$

$v = e^x$ $v' = e^x$

$f'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x$

$f'(x) = x \cdot e^x$

$f''(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$

$f'''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (x + 2)$

$f''(x) = 0$:

$e^x \cdot (1 + x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$e^x = 0$ => $\mathbb{L} = \{\}$

$(1 + x) = 0$ => $x = -1$

$f'''(-1) = e^{-1}(-1 + 2) > 0$

$f(-1) = -2 \cdot e^{-1} = -\frac{2}{e}$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP\left(-1 \middle| -\frac{2}{e}\right)$.

Lösung M03

Lösungslogik

a) Normalengleichung über Punkt-Steigungsformel
$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ mit $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$ (wegen gegebenem Punkt $P(-1|2e)$.

b) Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse mit $n(x) = 0$.

Klausuraufschrieb

a) $n(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
Wegen $P(-1|2e)$ ist $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$
$f'(x) = -2e^{-x}$
$f'(-1) = -2e$
$n(x) = -\frac{1}{-2e} \cdot (x + 1) + 2e$
$n(x) = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e$

b) $n(x) = 0$
$\frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e = 0 \qquad | \quad \cdot 2e$
$x + 1 + 4e^2 = 0$
$x = -4e^2 - 1$

Lösung M04

Klausuraufschrieb

a) Der Graph der Funktion weist eine waagrechte Asymptote $y = 3$ auf.
Daraus folgt: $b = 3$.
$P(0|2) \in f$
$f(0) = 2 = a \cdot e^0 + 3$
$a = -1$
$f(x) = -e^x + 3$

b) $f'(x) = -e^x$
$f'(x) = -1 = -e^x$
$e^x = 1$
$x = ln(1) = 0$
An der Stelle $x = 0$ besitzt der Funktionsgraph die Steigung $m = -1$.

Lösung M05

Lösungslogik

a) Wir betrachten das globale Verhalten von f.

b) Wir setzen $f'(x) = g'(x)$ und lösen die Gleichung nach x auf.

Klausuraufschrieb

a) Wegen $\lim\limits_{x\to|\infty|} \frac{1}{1-x} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to|\infty|} f(x) = 3$.

f hat die waagrechte Asymptote $y = 3$.

b) $f'(x) = g'(x)$:

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\quad g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$

$(1-x)^2 = (1+x)^2 \quad => \quad x = 0$

f und g haben bei $x_0 = 0$ dieselbe Steigung.

Lösung M06

Lösungslogik

a) Für die Skizze ermitteln wir die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extremstellen und Wendepunkte und betrachten das globale Verhalten.

b) Gleichung der Tangente über die Punkt-Steigungs-Formel mit:

$t(x) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$.

Klausuraufschrieb

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$e^{-x-1} + 1 = 0$

$e^{-x-1} = -1 \quad => \quad \mathbb{L} = \{\}$, d.h., der Funktionsgraph hat keine Nullstellen.

$f(0) = e^{-1} + 1 = 1 + \frac{1}{e}$

Der Funktionsgraph schneidet die y-Achse in $S_y\left(0\middle|1+\frac{1}{e}\right)$.

Extremstellen:

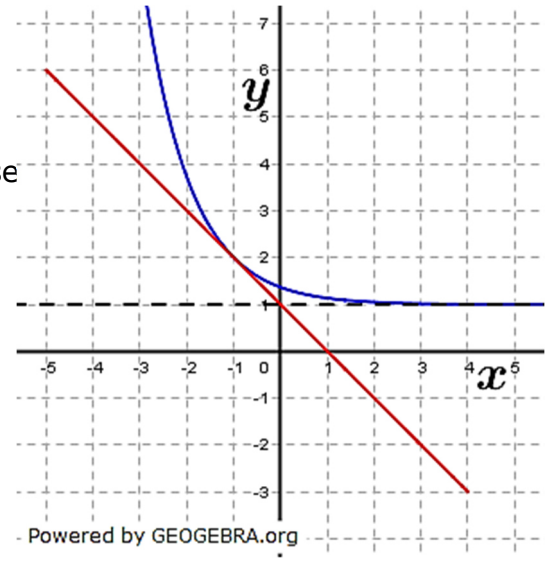
$f'(x) = -e^{-x-1}$

$-e^{-x-1} = 0 \quad => \quad \mathbb{L} = \{\}$, d.h., der Funktionsgraph besitzt keine Extremstellen.

Globales Verhalten:

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x-1} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.



b) $t(x) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$

$f(-1) = 2$

$f'(-1) = -e^0 = -1$

$t(x) = -1 \cdot (x+1) + 2$

$t(x) = -x + 1$

Lösung M07

Klausuraufschrieb

a) $f'(1{,}5)$:

$f(x) = 2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(1{,}5) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 1{,}5+1}} = 1$

b) $f'(x) = 1$

$\frac{2}{\sqrt{2x+1}} = 1 \quad | \quad \cdot \sqrt{2x+1}$

$2 = 1 \cdot \sqrt{2x+1} \quad | \quad ^2$

$4 = (2x+1)$

$2x+1 = 4$

$2x = 3$

$x = 1{,}5$

c) $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$f'(0) = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$

$f(0) = 2 \cdot \sqrt{1} = 2$

$t(x) = 2x + 2$

Lösung M08

Klausuraufschrieb

a) $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2$

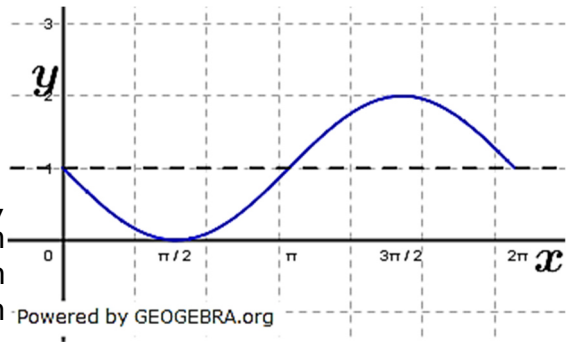
b) $f'(\pi)$:

$f'(x) = -cos\,(x)$

$f'(\pi) = -\,cos(\pi) = 1$

c) Aus der Skizze erkennen wir, dass der Funktionsgraph um nach links verschoben werden muss, damit dieser durch den Ursprung verläuft.

$c = \frac{\pi}{2}$



Lösung M09

Lösungslogik

a) Neben den Nullstellen ermitteln wir noch die Extremstellen, um eine Skizze anfertigen zu können.

b) Wir bilden den Betrag des Intergrals über f in den Grenzen der beiden Nullstellen.

Klausuraufschrieb

a) $f(x) = 0$:

$\frac{1}{4}x^3 - x^2 = 0$

$x^2\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$\frac{1}{4}x - 1 = 0$

$x_3 = 4$

Die beiden Nullstellen sind $N_1(0|0)$ *(doppelte Nullstelle) und* $N_2(4|0)$.

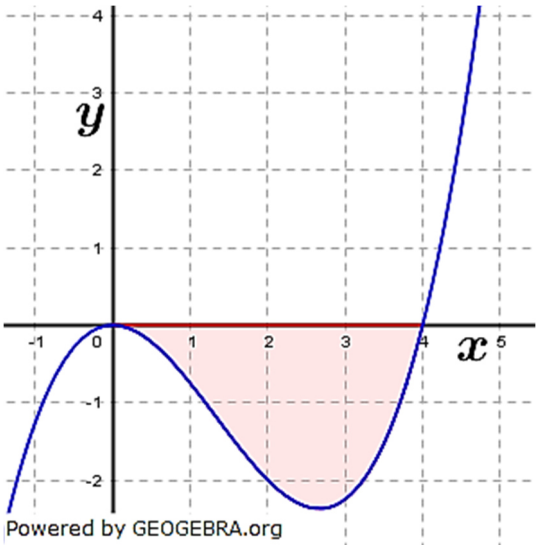
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x; \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$

$\frac{3}{4}x^2 - 2x = x \cdot (\frac{3}{4}x - 2)$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{8}{3}$

$f''(0) = -2 < 0$ => Hochpunkt

$f''\left(\frac{8}{3}\right) = 2 > 0$ => Tiefpunkt



b) $A = \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2\right) dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4\right|$

$= \left|\frac{256}{16} - \frac{64}{3}\right| = \left|16 - \frac{64}{3}\right|$

$= \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3}$

Die eingeschlossene Fläche ist $\frac{16}{3}$ FE groß.

Lösung M10

Lösungslogik

Wir skizzieren zunächst die Situation und berechnen danach das Integral.

Klausuraufschrieb

$f(x) = (x-4)^2$ ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|0)$.

Tangente über $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$f'(x) = 2x - 8$

$f'(0) = -8; \quad f(0) = 16$

$t(x) = -8x + 16$

Gesucht wird die grüne Fläche.

$A = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx$

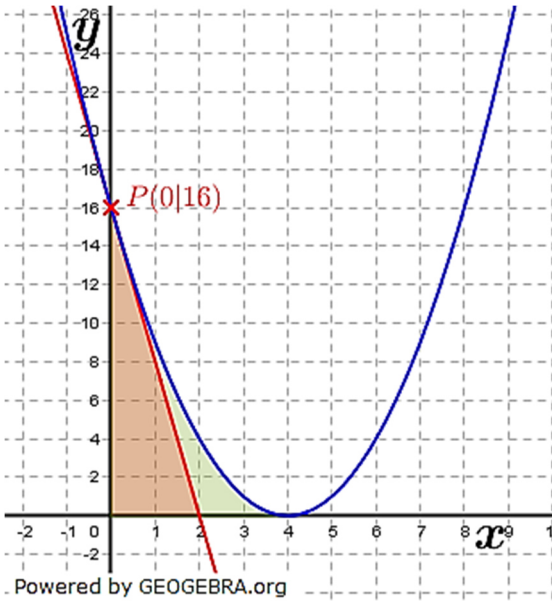
$A = \int_0^4 (x-4)^2 dx - \int_0^2 (-8x+16)dx$

$A = \left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_0^4 - [-4x^2 + 16x]_0^2$

$A = \frac{1}{3}(4-4)^3 - \frac{1}{3}(-4)^3 + 4 \cdot 2^2 - 32$

$A = \frac{64}{3} + 16 - 32 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$

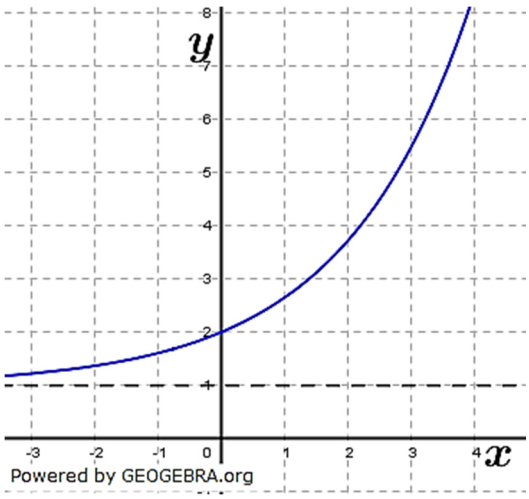
Die gesuchte Fläche ist $\frac{16}{3}$ FE *groß.*



Lösung M11

Klausuraufschrieb

a) Schnittpunkt y-Achse:
$S_y(0|3)$
Schnittpunkt x-Achse:
keine
waagrechte Asymptote:
$y = 1$



b) $f'(x) = 2$:
$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$
$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = 2$
$e^{\frac{1}{2}x} = 4$
$\frac{1}{2}x = ln(4)$
$x = 2 \cdot ln\,(4)$
Der Funktionsgraph hat an der Stelle $x_0 = 2ln\,(4)$ die Steigung $m = 2$.

Lösung M12

Lösungslogik

a) Hochpunkt von f über $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.

b) Normale über Punkt-Steigungsformel $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x-1) + f(1)$.

Klausuraufschrieb

a) $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$
1. Ableitung mittels Produktregel:
$u = x + 2 \qquad u' = 1$
$v = e^{-x} \qquad v' = -e^{-x}$
$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) = e^{-x} \cdot (1 - x - 2) = e^{-x} \cdot (-x-1)$
$f''(x) = -e^{-x}(-x-1) - e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = x \cdot e^{-x}$
$f'(x) = 0$:
$e^{-x} \cdot (-x-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$e^{-x} = 0 \;\; => \;\; \mathbb{L} = \{\}$
$-x - 1 = 0 \;\; => \;\; x = -1$
$f''(-1) = -1 \cdot e < 0$ | Hochpunkt
$f(-1) = (-1+2) \cdot e^1 = e$
Die Koordinaten des Hochpunktes sind $HP(-1|e)$

b) $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x-1) + f(1)$
$f'(1) = -2e^{-1}$
$f(1) = (1+2) \cdot e^{-1} = 3e^{-1}$
$n(x) = -\frac{1}{-2e^{-1}} \cdot (x-1) + 3e^{-1}$
$n(x) = \frac{1}{2}ex - \frac{1}{2}e + \frac{3}{e}$

Lösung M13

(1) $f(1) = F(1)$
Der Funktionswert $F(1) = 0$. Bei ist ein Tiefpunkt, somit ist auch die erste Ableitung $f(1) = 0$. Die Aussage stimmt.

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.
F hat im angegebenen Intervall einen Wendepunkt. Wendepunkte führen in der ersten Ableitung zu einem Extremstelle, diese Extremstelle wird in der zweiten Ableitung zu einer Nullstelle. Die Aussage stimmt.

(3) $f\big(F(-2)\big) > 0$
$F(-2) = 0$, damit ist $f(0)$ zu bestimmen. Das Schaubild hat bei $x_0 = 0$ negative Steigung, damit ist $f(0) < 0$, die Aussage ist falsch.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de