

Pflichtteilaufgaben zur analytischen Geometrie I

Abituraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) 2019 – heute
Dokument mit 6 Aufgaben

Aufgabe A5/2019

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

$$E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$$

- Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E .
- Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene E .
Bestimmen Sie eine Gleichung von h .

(Quelle Abitur BW 2019 Aufgabe 5)



Aufgabe A5/2019N

Gegeben ist die Ebene $E: 4x_2 + 3x_3 = 12$.

- Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
- Die Ebene F entsteht durch Spiegelung von E an der x_1x_2 -Ebene.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F .

(Quelle Abitur BW 2019 Nachtermin Aufgabe 5)

Aufgabe A6/2019

Gegeben ist die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem g die x_2x_3 -Ebene schneidet.
- Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-3|-1|7)$ von der Geraden g .

(Quelle Abitur BW 2019 Aufgabe 6)

Aufgabe A6/2019N

Gegeben sind die Punkte $P(5|4|3)$, $Q(1|3|4)$ und $R(6|0|3)$ sowie die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden h .

- Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.
- Zeigen Sie dass das Dreieck PQR bei P einen rechten Winkel besitzt.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der das Dreieck PQR zu einem Rechteck ergänzt.

(Quelle Abitur BW 2019 Nachtermin Aufgabe 5)

Aufgabe A6/2020

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

- Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
- Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E .

(Quelle Abitur BW 2020 Aufgabe 6)

Aufgabe A7/2020

Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1 -Achse in einem Punkt, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat.

Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

(Quelle Abitur BW 2020 Aufgabe 7)

Lösung A5/2019

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \quad E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$$

Lösungslogik

- a) Untersuchung, ob die Gerade parallel zur Ebene verläuft über das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von g und Normalenvektor von E .
- b) Zur Spiegelung von g an E für benötigen wir zunächst den Lotfußpunkt L vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E . Der Stützvektor \vec{v} von h errechnet sich dann nach der Formel $\vec{v} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PL}$ mit \overline{OP} als Stützvektor von g und \overline{PL} als Vektor vom Aufpunkt von g zum Lotfußpunkt auf E .

Die Spiegelgerade h hat dann die Gleichung $h: \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

Klausuraufschrieb

- a) gegenseitige Lage von g und E :
Prüfung auf Parallelität von g und E :

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E \circ \vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0$$

Wegen $\vec{n}_E \circ \vec{rv}_g = 0$ verläuft $g \parallel E$.

- b) Spiegelgerade h :
Lotfußpunkt vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E :
Hilfsgerade j durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor:

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$j \cap E$:

$$x_1 = 2 + 3s; \quad x_2 = -2s; \quad x_3 = 1 + s$$

$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E$:

$$3 \cdot (2 + 3s) - 2 \cdot (-2s) + 1 + s = 14$$

$$6 + 9t + 4t + 1 + t = 14$$

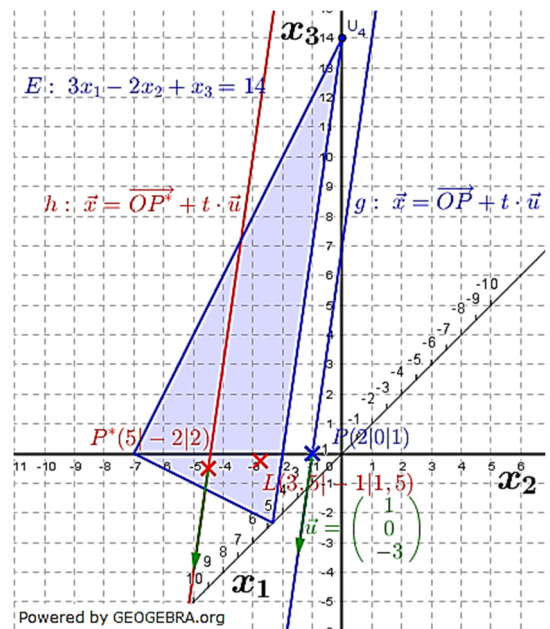
$$7 + 14t = 14$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\overline{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}; \quad \overline{PL} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OP^*} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

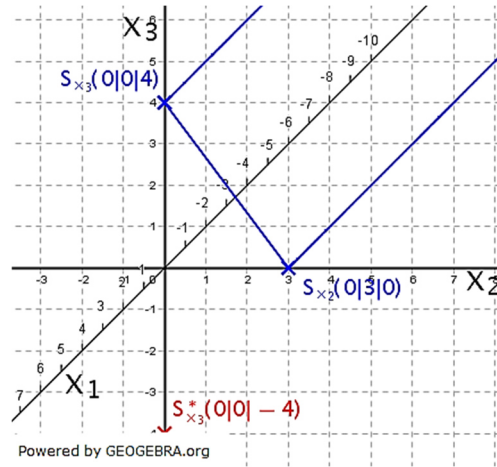
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Lösung A5/2019N

E: $4x_2 + 3x_3 = 12$

- a) Bestimmung der Spurpunkte:
 $S_{x_2}(0|3|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$
 Wegen fehlendem Spurpunkt S_{x_1}
 verläuft die Ebene parallel zur
 x_1 -Achse.
 Zeichnung siehe Grafik rechts.



- b) Spiegelebene F:
 Der Spurpunkt S_{x_2} liegt bereits in
 der x_1x_2 -Ebene, kann somit nicht
 gespiegelt werden. Der Spiegel-
 punkt von S_{x_3} ist $S_{x_3}^*(0|0|-4)$.
 Ein Spurpunkt ist nach wie vor nicht
 vorhanden.

Ebenengleichung F:

F: $\frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{4} = 1$

| Achsenabschnittsform; · 12

F: $4x_2 - 3x_3 = 12$

Lösung A6/2019

Lösungslogik

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

- a) Ermittlung des Schnittpunktes der Geraden g mit der x_2x_3 -Ebene, dort ist
 $x_1 = 0$.
 b) Abstand Punkt-Gerade über die Abstandsformel.

Klausuraufschrieb

- a) Spurpunkt mit der x_2x_3 -Ebene, dort ist $x_1 = 0$:
 $4 + t = 0$
 $t = -4$

$\vec{OS}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der Geraden g mit der x_2x_3 -Ebene hat die Koordinaten
 $S_1(0|2|-5)$.

- b) Abstand $P(-3|-1|7)$ von g :

$d(P; g) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{rv}_g|}{|\vec{rv}_g|}$ mit $A(4|-6|3)$ als Aufpunkt von g und $\vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als

Richtungsvektor von g .

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$d(P; g) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}$

Abituraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) 2019 - heute

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$d(P; g) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{27}{3} = 9$$

Der Abstand des Punktes P von der Geraden g beträgt 9 LE.

Lösung A6/2019N

a) Aufstellung Gerade h :

$$h: \vec{x} = \overline{OP} + r \cdot \overline{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \neq v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind g und h entweder windschief oder schneiden sich.

Prüfung auf Schnittpunkt:

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad -r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 4t + 4r = 3$$

$$(2) \quad 5t + r = 3$$

$$(3) \quad -5t - r = 1$$

$$(2)+(3) \quad 0 \neq 4$$

Aus (2)+(3) folgt: Die beiden Geraden sind windschief.

b) Rechtwinkligkeit des Dreiecks PQR bei P :

$$\overline{QP} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overline{RP} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 4-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{QP} \circ \overline{RP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$$

Wegen $\overline{QP} \circ \overline{RP} = 0$ ist das Dreieck PQR bei P rechtwinklig.

c) Ergänzungspunkt des Dreiecks PQR zu einem Rechteck:

Wegen Rechtwinkligkeit bei P liegt der Punkt S diagonal zu P , sodass gilt:

$$\overline{OS} = \overline{OQ} + \overline{PR}$$

$$\overline{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Ergänzungspunkt hat die Koordinaten $S(2|-1|4)$.

Lösung A6/2020

Lösungslogik

- Wir berechnen die Spurpunkte von E und F und zeichnen die Ebenen.
- Wir bilden $E \cap F$. Im Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen wählen wir einen Parameter frei, um zur Parametergleichung der Schnittgeraden zu gelangen.
- Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E über die HNF.

Klausuraufschrieb

- a) Spurpunkte von E :
 $Sx_{1_E}(3|0|0)$; $Sx_{2_E}(0|3|0)$; $Sx_{3_E}(0|0|6)$

Spurpunkte von F :
 $Sx_{2_F}(0|2|0)$; $Sx_{3_F}(0|0|4)$

Grafik: siehe rechts.

- b) $E \cap F$

I) $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

II) $2x_2 + x_3 = 4$

$x_3 = t$.

II) $2x_2 + t = 4 \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{2}t$

I) $2x_1 + 2(2 - \frac{1}{2}t) + t = 6$

$2x_1 + 4 - t + t = 6$

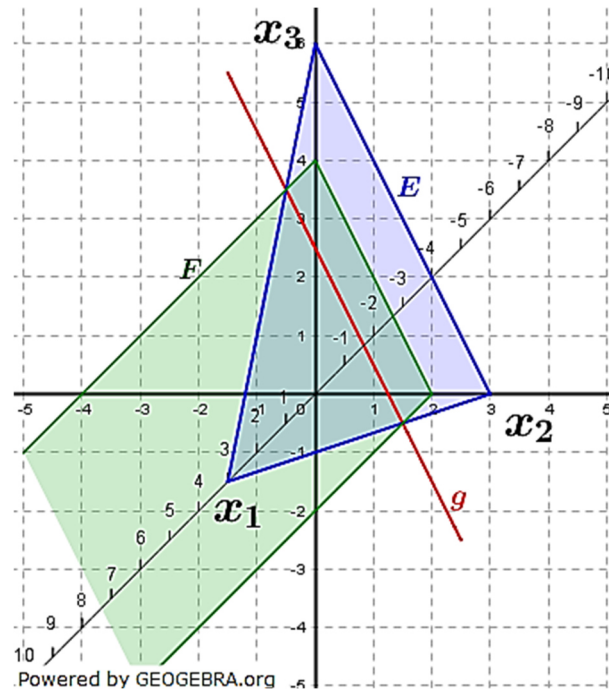
$2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- c) $d(0; E) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4+4+1}} = |-2| = 2$

Der Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ zur Ebene E beträgt $2 LE$.



Lösung A7/2020

Lösungslogik

Die Geradengleichung hat den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor (wegen Orthogonalität).

Der Aufpunkt ist der noch zu bestimmende Schnittpunkt mit der x_1 -Achse $Q(q_1|0|0)$.

Dieser Punkt muss den Abstand 3 zum Punkt $P(0|2|1)$ haben.

Berechnung über den Satz des Pythagoras im Raum.

Klausuraufschrieb

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{n}_E \text{ mit } \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$q_1: \sqrt{(q_1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = 3$$

$$\sqrt{q_1^2 + 4 + 1} = 3 \quad | \quad ^2$$

$$q_1^2 + 5 = 9 \quad | \quad -5$$

$$q_1^2 = 4$$

$$q_{1,2} = \pm 2$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ alternativ } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$