Lösung A5/2019

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad E\colon\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$

Lösungslogik

a) Untersuchung, ob die Gerade parallel zur Ebene verläuft über das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von g und Normalenvektor von E.

b) Zur Spiegelung von g an E für benötigen wir zunächst den Lotfußpunkt L vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E. Der Stützvektor $\vec{v}$ von h errechnet sich dann nach der Formel $\vec{v} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PL}$ mit $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor von g und $\overrightarrow{PL}$ als Vektor vom Aufpunkt von g zum Lotfußpunkt auf E.

Die Spiegelgerade h hat dann die Gleichung $h\colon\ \vec{x} = \vec{v} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$

Klausuraufschrieb

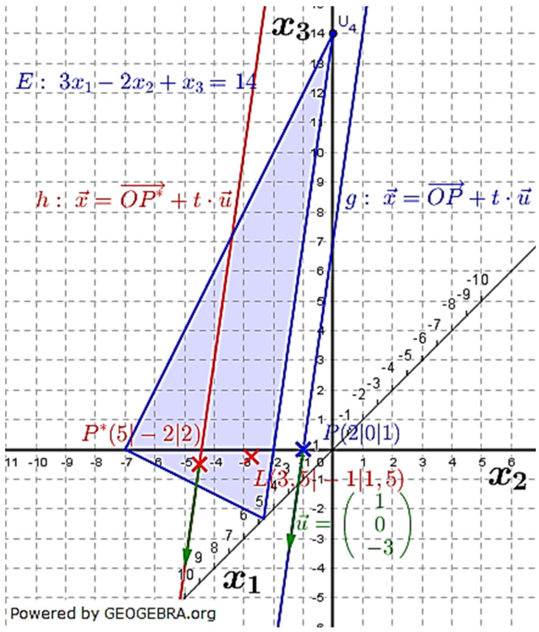
a) gegenseitige Lage von g und E:

Prüfung auf Parallelität von g und E :

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0$

Wegen $\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{rv_g} =$ verläuft $g \parallel E$.



b) Spiegelgerade h:

Lotfußpunkt vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E:

Hilfsgerade j durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor:

$j\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$j \cap E$:

$x_1 = 2 + 3s;\ \ x_2 = -2s;\ \ x_3 = 1 + s$

$x_1;\ x_2;\ x_3 \to E$:

$3\cdot(2+3s) - 2\cdot(-2s) + 1 + s = 14$

$6 + 9t + 4t + 1 + t = 14$

$7 + 14t = 14$

$t = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1\\1{,}5\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix}3{,}5\\-1\\1{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$

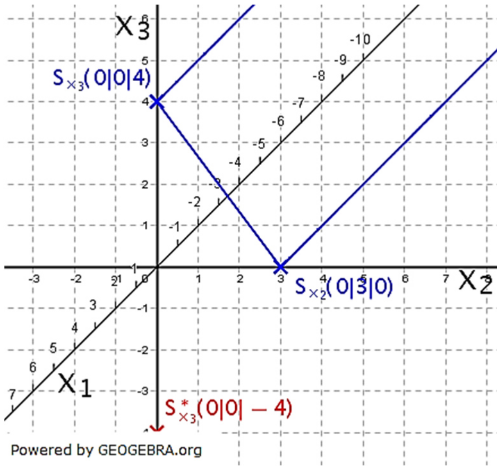
$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1{,}5\\-1\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$

$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

Lösung A5/2019N

$E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 12$

a) Bestimmung der Spurpunkte:
$S_{x_2}(0|3|0);\quad S_{x_3}(,|0|4)$
Wegen fehlendem Spurpunkt S_{x_1} verläuft die Ebene parallel zur x_1-Achse.
Zeichnung siehe Grafik rechts.



b) Spiegelebene F:
Der Spurpunkt S_{x_2} liegt bereits in der x_1x_2-Ebene, kann somit nicht gespiegelt werden. Der Spiegelpunkt von S_{x_3} ist $S^*_{x_3}(0|0|-4)$.
Ein Spurpunkt ist nach wie vor nicht vorhanden.
Ebenengleichung F:
$F\colon\ \frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{4} = 1 \qquad |\quad$ Achsenabschnittsform; $\cdot 12$
$F\colon\ 4x_2 - 3x_3 = 12$

Lösung A6/2019

Lösungslogik

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};\ t\ \in\ \mathbb{R}$$

a) Ermittlung des Schnittpunktes der Geraden g mit der x_2x_3-Ebene, dort ist $x_1 = 0$.

b) Abstand Punkt-Gerade über die Abstandsformel.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkt mit der x_2x_3-Ebene, dort ist $x_1 = 0$:
$4 + t = 0$
$t = -4$
$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$
Der Schnittpunkt der Geraden g mit der x_2x_3-Ebene hat die Koordinaten $S_1(0|2|-5)$.

b) Abstand $P(-3|-1|7)$ von g:
$d(P;g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $A(4|-6|3)$ als Aufpunkt von und $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor von g.
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}$$

$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{27}{3} = 9$

Der Abstand des Punktes P von der Geraden g beträgt $9\,LE$.

Lösung A6/2019N

a) Aufstellung Gerade h:

$h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wegen $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \neq v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind g und h entweder windschief oder schneiden sich.

Prüfung auf Schnittpunkt:

$g \cap h$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad -r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) $4t + 4r = 3$
(2) $5t + r = 3$
(3) $\underline{-5t - r = 1}$
(2)+(3) $0 \neq 4$

Aus (2)+(3) folgt: Die beiden Geraden sind windschief.

b) Rechtwinkligkeit des Dreiecks PQR bei P:

$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 4-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$

Wegen $\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{RP} = 0$ ist das Dreieck PQR bei P rechtwinklig.

c) *Ergänzungspunkt des Dreiecks PQR zu einem Rechteck:*

Wegen Rechtwinkligkeit bei P liegt der Punkt S diagonal zu P, sodass gilt:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Ergänzungspunkt hat die Koordinaten $S(2|-1|4)$.

Lösung A6/2020

Lösungslogik

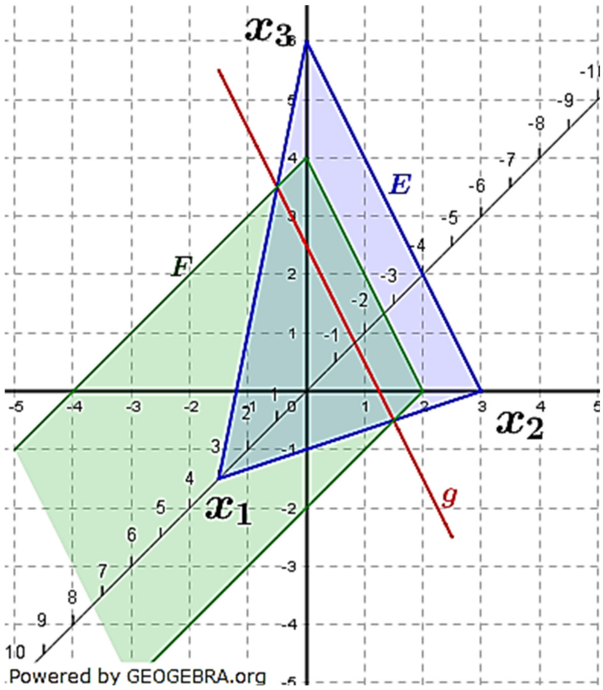
a) Wir berechnen die Spurpunkte von E und F und zeichnen die Ebenen.

b) Wir bilden $E \cap F$. Im Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen wählen wir einen Parameter frei, um zur Parametergleichung der Schnittgeraden zu gelangen.

c) Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E über die HNF.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:
$Sx_{1_E}(3|0|0);\quad Sx_{2_E}(0|3|0);\quad Sx_{3_E}(0|0|6)$
Spurpunkte von F:
$Sx_{2_F}(0|2|0);\quad Sx_{3_F}(0|0|4)$
Grafik: siehe rechts.



b) $E \cap F$

$\text{I)}\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$\text{II)}\quad 2x_2 + x_3 = 4$

$x_3 = t.$

$\text{II)}\quad 2x_2 + t = 4 \implies x_2 = 2 - \frac{1}{2}t$

$\text{I)}\quad 2x_1 + 2(2 - \frac{1}{2}t) + t = 6$

$2x_1 + 4 - t + t = 6$

$2x_1 = 2 \implies x_1 = 1$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $d(0;E) = \frac{|2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4+4+1}} = |-2| = 2$

Der Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ zur Ebene E beträgt $2\,LE$.

Lösung A7/2020

Lösungslogik

Die Geradengleichung hat den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor (wegen Orthogonalität).
Der Aufpunkt ist der noch zu bestimmende Schnittpunkt mit der x_1-Achse $Q(q_1|0|0)$.
Dieser Punkt muss den Abstand 3 zum Punkt $P(0|2|1)$ haben.
Berechnung über den Satz des Pythagoras im Raum.

Klausuraufschrieb

g: $\vec{x}=\overrightarrow{OQ}+s\cdot\overrightarrow{n_E}$ mit $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}q_1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

q_1: $\sqrt{(q_1-0)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}=3$

$\sqrt{q_1^2+4+1}=3 \qquad |\ ^2$

$q_1^2+5=9 \qquad |\ -5$

$q_1^2=4$

$q_{1_{1,2}}=\pm 2$

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ alternativ $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$