

### Aufgabe M01

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + 7x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = -5$$

$$4x_1 - x_2 + 4x_3 = -7$$

(Quelle Landungsbildungsserver BW)



### Aufgabe M02

Stellen Sie den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dar.}$$

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

### Aufgabe M03

Gegeben sind die Ebenen  $E_1: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$  und  $E_2: x_3 = 2$ .

- Stellen Sie die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
- Zeichnen Sie die Schnittgerade  $g$  von  $E_1$  und  $E_2$  ein und bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

### Aufgabe M04

Gegeben sind die Ebenen  $E: x_1 + 2x_2 = 4$  und  $F: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ .

- Stellen Sie die Ebenen  $E$  und  $F$  in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
- Zeichnen Sie die Schnittgerade  $g$  von  $E$  und  $F$  ein und bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

### Aufgabe M05

- Geben Sie die Gleichung der Ebene  $E$  an, welche die Spurpunkte  $(0|0|4)$  und  $(0|-3|0)$  und keinen Schnittpunkt mit der  $x_1$ -Achse hat.
- Geben Sie die Gleichung der Ebene  $F$  an, welche den Punkt  $A(3|-3|-1)$  enthält und parallel zur Ebene  $E: x_1 = 2$  ist.
- Geben Sie die Gleichung der Geraden  $g$  an, welche durch den Punkt

$$P(5|1|-4) \text{ geht und senkrecht zur Ebene } E_1: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ steht.}$$

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

# Pflichtteilaufgaben zur analytischen Geometrie I

Abitur-Musteraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) ab 2019

## Aufgabe M06

Gegeben sind die Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$ .

- Zeigen Sie, dass  $g$  und  $h$  parallel, aber nicht identisch sind.
- Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $E$  an, in der die Geraden  $g$  und  $h$  liegen.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M07

Gegeben sind die beiden Ebenen  $E$  und  $F$  mit:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$F: x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

- Weisen Sie nach, dass  $E$  und  $F$  parallel zueinander liegen.
- Bestimmen Sie den Abstand von  $E$  und  $F$ .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M08

Gegeben sind die Punkte  $A(3|0|1)$ ,  $B(6|2|2)$  und  $C(0|3|5)$ . Die Ebene  $E$  enthält die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

- Bestimmen Sie die Gleichung von  $E$  in Normalenform und Koordinatenform.
- Untersuchen Sie die Lage der Ebene  $E$  zur Geraden  $g$  mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M09

Gegeben sind die Geraden  $g$  mit  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;  $t \in \mathbb{R}$  und  $h$  mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass die Geraden  $g$  und  $h$  orthogonal zueinander liegen.
- Untersuchen Sie, ob sich  $g$  und  $h$  auch schneiden.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M10

Gegeben sind die Punkte  $A(12|0|0)$ ,  $B(4|10|5)$  und  $C(2|8|4)$ .

- Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig ist.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

# Pflichtteilaufgaben zur analytischen Geometrie I

Abitur-Musteraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) ab 2019

## Aufgabe M11

Gegeben sind die Punkte  $A(-7|0|1)$ ,  $B(-5|3|1)$  und  $C(-4|0|-1)$ .

- Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig ist.
- Das Dreiecks  $ABC$  lässt sich durch einen Punkt  $P$  ergänzen, dass eine Raute entsteht. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $P$ .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M12

Gegeben sind die Punkte  $A(1|3|0)$ ,  $B(3|7|-7)$  und  $C(2|8|1)$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M13-1

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 12 \\ x_2 + x_3 &= 3\end{aligned}$$

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Aufgabe M13-2

Gegeben ist die Ebene  $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$  und die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Zeigen Sie, dass  $E$  parallel zu  $g$  verläuft.
- Berechnen Sie den Abstand von  $g$  und  $E$ .
- Die Gerade  $h$  entsteht durch Spiegelung der Geraden  $g$  an  $E$ . Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden  $h$ .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

## Lösung M01

### Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines WTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

### Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	=	Operation
I	1	1	7	2	
II	2	-1	-3	-5	$II - 2 \cdot I$
III	4	-1	4	-7	$III - 4 \cdot I$

I	1	1	7	2	
II'	0	-3	-17	-9	
III'	0	-5	-24	-15	$5 \cdot II' - 3 \cdot III'$

I	1	1	7	2	
II'	0	-3	-17	-9	
III''	0	0	-13	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$$\begin{aligned} -13x_3 &= 0 & \Rightarrow x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 17 \cdot 0 &= -9 & \Rightarrow x_2 &= 3 \\ x_1 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 &= 2 & \Rightarrow x_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{x_1 | x_2 | x_3 (-1 | 3 | 0)\}$$

## Lösung M02

### Lösungslogik

Wir stellen die Linearkombination  $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{v}$  und lösen das entstehende Gleichungssystem nach  $r$ ,  $s$  und  $t$  auf.

### Klausuraufschrieb

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{v}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gauß-Schema					
Nr.	$r$	$s$	$t$	=	Operation
I	0	-1	5	14	
II	1	3	-2	-5	$II - 2 \cdot I$
III	3	7	2	7	$III - 4 \cdot I$

Wegen der Null in der ersten Spalte der ersten Zeile vertauschen wir die Zeile I mit der Zeile III.

Nr.	r	s	t	=	Operation
I	3	7	2	7	
II	1	3	-2	-5	$3 \cdot II - I$
III	0	-1	5	14	

Nr.	r	s	t	=	Operation
I	3	7	2	7	
II'	0	2	-8	-22	
III	0	-1	5	14	$2 \cdot III + II'$

Nr.	r	s	t	=	Operation
I	3	7	2	7	
II'	0	2	-8	-22	
III	0	0	2	6	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$$\begin{aligned}
 2t &= 6 && \Rightarrow t = 3 \\
 2s - 8 \cdot 3 &= -22 && \Rightarrow s = 1 \\
 3r + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 &= 7 && \Rightarrow r = -2 \\
 -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## Lösung M03

### Lösungslogik

Wir stellen zunächst die Koordinatengleichung der Ebene  $E_1$  auf und errechnen deren Spurpunkte. Die Ebene  $E_2$  ist eine parallele Ebene zur  $x_1x_2$ -Ebene im Abstand  $x_3 = 2$ .

Wir zeichnen die beiden Ebenen ein und bestimmen danach die Gleichung der Schnittgeraden durch Gleichsetzung von  $E_1$  mit  $E_2$ .

---

### Klausuraufschrieb

Koordinatengleichung von  $E_1$ :

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = d$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = d$$

$$d = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1$$

| Punktprobe mit Aufpunkt

| :12

| Achsenabschnittsform

$$S_{x_1}(6|0|0); \quad S_{x_2}(0|4|0); \quad S_{x_3}(0|0|6)$$

*Abitur-Musteraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) ab 2019*

Schnittgerade  $g$ :

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_3 = 2$$

Wir wählen eine Unbekannte frei, z.B.  $x_2 = t$ .

$$2x_1 + 3t + 4 = 12$$

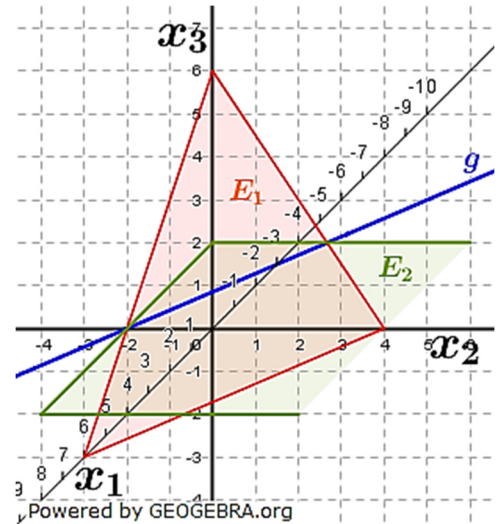
$$x_1 = 4 - \frac{3}{2}t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{3}{2}t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Lösung M04

### Lösungslogik

Wir bestimmen die Spurpunkte der Ebene  $E$  und  $F$  und zeichnen damit die Ebenen und die Schnittgerade in das Koordinatensystem. Danach berechnen wir die Gleichung der Schnittgeraden durch Gleichsetzung von  $E$  mit  $F$ .

### Klausuraufschrieb

$$x_1 + 2x_2 = 4 \quad | \quad :4$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1 \quad | \quad \text{Achsenabschnittsform } E$$

$$S_{E_{x_1}}(4|0|0); \quad S_{E_{x_2}}(0|2|0)$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \quad | \quad :8$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad | \quad \text{Achsenabschnittsform } F$$

$$S_{F_{x_1}}(4|0|0); \quad S_{F_{x_2}}(0|8|0); \quad S_{F_{x_3}}(0|0|4)$$

$E \cap F$

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

Wir wählen eine Variable frei, z.B.  $x_3 = t$

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 = 4$$

$$(2) \quad 2x_1 + x_2 = 8 - 2t$$

$$(1) \quad x_1 = 4 - 2x_2$$

$$(1) \rightarrow (2)$$

$$2 \cdot (4 - 2x_2) + x_2 = 8 - 2t$$

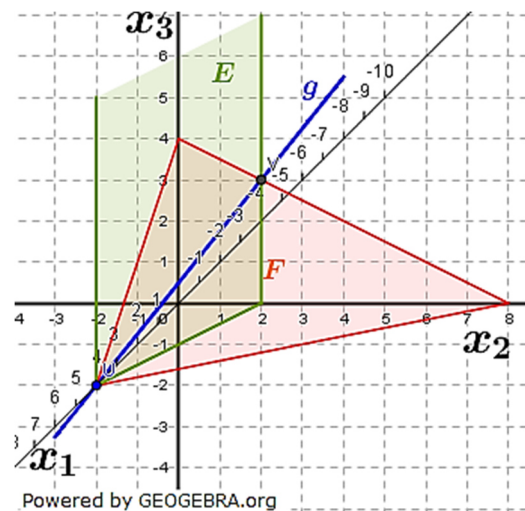
$$8 - 3x_2 = 8 - 2t$$

$$x_2 = \frac{2}{3}t$$

$$x_2 \rightarrow (1)$$

$$x_1 + 2 \cdot \frac{2}{3}t = 4$$

$$x_1 = 4 - \frac{4}{3}t$$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{3}t \\ 2 \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## Lösung M05

### Lösungslogik

- Über die gegebenen Spurpunkte stellen wir die Achsenabschnittsform der Ebene  $E$  auf.
- Die Ebene  $E$  hat die Gleichung  $E: x_1 = 2$ . Eine zu  $E$  parallele Ebene  $F$  hat denselben Normalenvektor und die Gleichung  $F: x_1 = d$ . Über eine Punkteprobe mit  $A$  errechnen wir dann  $d$  von  $F$  neu.
- Eine Gerade steht dann senkrecht auf einer Ebene, wenn ihr Richtungsvektor ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene ist.

### Klausuraufschrieb

a)  $E: -\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$

b)  $E: x_1 = 2$

$F \parallel E: x_1 = d$

$3 = d$

$F: x_1 = 3$

| Punkteprobe mit  $A(3|-3|1)$

c)  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Lösung M06

### Lösungslogik

- Die Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  sind ein Vielfaches voneinander und der Aufpunkt von  $g$  liegt nicht auf  $h$ .
  - Wir nehmen den Aufpunkt von  $g$  als Aufpunkt der Ebene, ein Richtungsvektor der Ebene ist gleich dem Richtungsvektor der parallelen Geraden, der zweite Richtungsvektor der Ebene ist der Vektor vom Aufpunkt von  $g$  zum Aufpunkt von  $h$ .
-

Klausuraufschrieb

a)  $\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  sind ein Vielfaches voneinander

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin g \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin h$$

$g$  und  $h$  sind parallel aber nicht identisch.

b)  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-4 \\ -1-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix}$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung M07**

Lösungslogik

- a) Wir bilden den Normalenvektor von  $E$  über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren von  $E$  und vergleichen diesen mit dem von  $F$ .
- b) Wir berechnen den Abstand des Aufpunktes von  $E$  zur Ebene  $F$  mithilfe der HNF.

Klausuraufschrieb

a)  $k \cdot \vec{n}_E = \overrightarrow{rv_1} \times \overrightarrow{rv_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Normalenvektoren von  $E$  und  $F$  sind identisch, die Ebenen liegen parallel.

- b) HNF von  $F$ :

$$F: \frac{x_1 - x_2 + x_3 + 1}{\sqrt{1+1+1}} = 0$$

$A(1|2|3)$  | Aufpunkt von  $E$

$$d(F; A) = \frac{|1-2+3+1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Der Abstand der beiden Ebenen beträgt  $\sqrt{3}$  LE.

**Lösung M08**

Klausuraufschrieb

a)  $k \cdot \vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$E: \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = d$$

$$3 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = d$$

$$d = 6$$

$$E: x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6$$



b) Lage von  $E$  zur Geraden  $g$ :

$$x_1 = 4 + 2t$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = 1$$

Einsetzen in Ebenengleichung:

$$4 + 2t - 3 \cdot t + 3 \cdot 1 = 6$$

$$7 - t = 6 \Rightarrow t = 1$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Geraden  $g$  schneidet  $E$  in  $S(6|1|1)$ .

## Lösung M09

### Lösungslogik

- Orthogonalität von Geraden bedeutet, dass das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren Null sein muss.
- Wir setzen die beiden Geradengleichungen gleich, stellen das LGS auf und prüfen, ob dieses eine Lösung hat.

---

### Klausuraufschrieb

$g \perp h$ :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Die Geraden  $g$  und  $h$  sind orthogonal.

$g \cap h$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 2t - s = 4$$

$$(2) \quad t - 2s = 5 \Rightarrow t = 2s + 5$$

$$(3) \quad -4t - s = -2$$

$$(2) \rightarrow (1)$$

$$2 \cdot (2s + 5) - s = 4$$

$$3s + 10 = 4$$

$$s = -2$$

$$s \rightarrow (2)$$

$$(2) \quad t = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$$s; t \rightarrow (3)$$

$$(3) \quad -4 \cdot 1 + 2 = -2$$

Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich.

Schnittpunkt  $S$ :

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  hat die Koordinaten  $S(5|-1|3)$ .

### Lösung M10

#### Klausuraufschrieb

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-12 \\ 10-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-12 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 8-10 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 80 + 80 + 20 = 180$$

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 16 - 20 - 5 = -9$$

$$\vec{AC} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 20 - 16 - 4 = 0$$

Wegen  $\vec{AC} \circ \vec{BC} = 0$  ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 64 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \cdot \sqrt{9} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{180} = 9 \cdot \sqrt{5}$$

Das Dreieck ABC hat eine Fläche von  $9\sqrt{5}$  FE.

### Lösung M11

#### Lösungslogik

- Die Länge von zwei Seiten muss gleich lang sein, die dritte Seite ist dann die Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
- Der Punkt muss von der Basisseite genau denselben Abstand haben, wie der Abstand des Punktes gegenüber der Basis zur Basis.
- Wir berechnen die Fläche des Dreiecks über die Formel:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

#### Klausuraufschrieb

$$a) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 - (-7) \\ 3 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 - (-7) \\ 0 - 0 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 - (-5) \\ 0 - 3 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}; \quad |\vec{AC}| = \sqrt{9 + 0 + 4} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

Wegen  $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$  ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis  $\vec{BC}$ .

$$b) \quad \vec{OP} = \vec{OC} + \vec{AB}$$

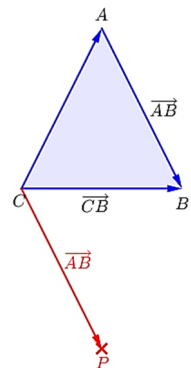
$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} -4 + 2 \\ 0 + 3 \\ -1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P hat die Koordinaten  $P(-2|3|-1)$ .

$$c) \quad A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 + 16 + 81} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{133}$$

Das Dreieck ABC ist  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{133}$  FE groß.



## Lösung M12

### Lösungslogik

Wir berechnen die Fläche des Dreiecks über die Formel:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

### Klausuraufschrieb

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 7-3 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 8-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{576 + 36 + 36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{648} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von  $9 \cdot \sqrt{2}$  FE.

## Lösung M13-1

Gauß-Schema					
Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	=	Operation
I	1	3	-4	6	
II	-1	3	10	12	II + I
III	0	1	1	3	

I	1	3	-4	6	
II	0	6	6	18	
III	0	1	1	3	III-II:6

I	1	3	-4	6	
II	0	1	1	3	
III	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt. Wir haben ein System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Somit ist eine Unbekannte frei zu wählen, wir wählen:

$$x_3 = t$$

$$x_2 + t = 3$$

$$x_2 = 3 - t$$

$$x_1 + 3(3 - t) - 4t = 6$$

$$x_1 + 9 - 3t - 4t = 6$$

$$x_1 = -3 + 7t$$

$$\mathbb{L} = \{x_1; x_2; x_3 | -3 + 7t; 3 - t; t\}$$

**Lösung M13-2**

a)  $E$  parallel zu  $g$ :

Eine Gerade steht dann senkrecht auf einer Ebene, wenn das Skalarprodukt aus Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene 0 ergibt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

b) Abstand von  $g$  und  $E$ :

Da die Gerade parallel zur Ebene verläuft, haben alle Punkte der Geraden denselben Abstand von  $E$ . Wir berechnen diesen Abstand über den Aufpunkt von  $g$  und der HNF von  $E$ .

$$\text{HNF: } \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 9}{\sqrt{4+1+4}} = 0$$

Aufpunkt  $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  von  $g$  einsetzen:

$$d(e; g) = \frac{|2 \cdot (-2) - 4 + 2 \cdot 4 - 9|}{3} = \frac{|-9|}{3} = 3$$

c) Gleichung einer Spiegelgeraden  $h$ :

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. In Aufgabenteil b) haben wir festgestellt, dass der Abstand der Geraden  $g$  zur Ebene  $E$   $3 LE$  ist. Also muss auch der Abstand der gespiegelten Gerade  $h$  zur Ebene  $E$  ebenfalls  $3 LE$  sein.

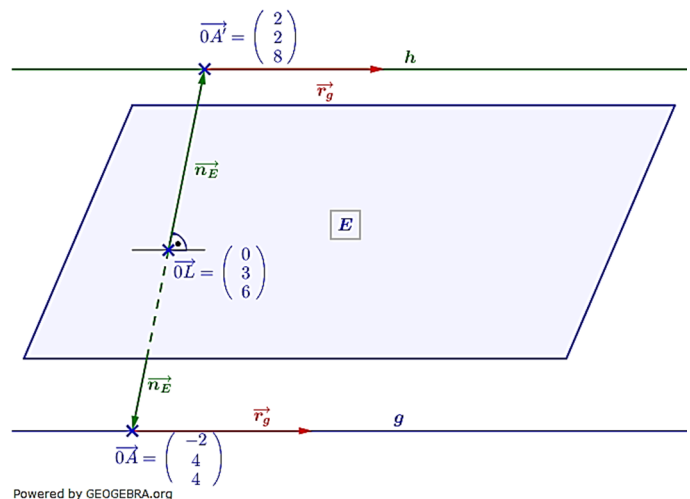
Aufgabenteil b) ergab auch, dass  $|\vec{n}_E| = 3$  ist. Also ist der Punkt  $A$  genau eine Länge des Normalenvektors von  $E$  entfernt und somit muss auch  $A'$  genau eine Länge des Normalenvektors von  $E$  entfernt auf der anderen Seite der Ebene liegen.

Die Koordinaten des Punktes  $A'$  berechnen sich aus  $\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AL}$ , wobei  $|\vec{AL}| = |\vec{n}_E| = 3$  ist.

Leider wissen wir nicht, ob der Normalenvektor in Richtung des Punktes  $A$  senkrecht auf der Ebene steht oder aber in Richtung des Punktes  $A'$ .

Eine einfache Lösung dies festzustellen ist die, dass wir die Koordinaten des Lotfußpunktes  $L$  aus  $\vec{OL} = \vec{OA} + \vec{n}_E$  bilden und dann mit dem Ergebnis eine Punktprobe mit  $E$  machen.

$$\vec{OL} = \vec{OA} + \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Punktprobe mit  $E$ :

$$2 \cdot 0 - 3 + 2 \cdot 6 \stackrel{!}{=} 9; \quad 9 = 9 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in E$$

$$\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$