Abitur-Musteraufgaben Beschreiben und Begründen (Pflichtteil) ab 2019

Aufgabe M01

Gegeben sind zwei zueinander parallele Ebenen E_1 und E_2. Die Ebene F ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen den gleichen Abstand.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgaben M02

Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F im Abstand 3.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgaben M03

Die vier Punkte A, B, C und D bilden ein Parallelogramm im Raum. Des Weiteren ist ein Punkt P gegeben.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um festzustellen ob der Punkt P im Parallelogramm $ABCD$ liegt.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M04

a) Skizzieren Sie das Schaubild einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$.

b) Begründen Sie: Ist $f''(x) < 0$, so ist das Schaubild von f eine Rechtskurve.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05

Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Rotationskörpers berechnet.
Skizzieren Sie den Sachverhalt. Geben Sie an, was für ein Körper entsteht.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M06

Für ein Ereignis A bei der mehrmaligen Durchführung eines Bernoulli-Experimentes gilt

$$P(A) = 1 - \left(\binom{15}{13} \cdot 0{,}6^{13} \cdot 0{,}4^2 + 15 \cdot 0{,}6^{14} \cdot 0{,}4 + 0{,}6^{15}\right).$$

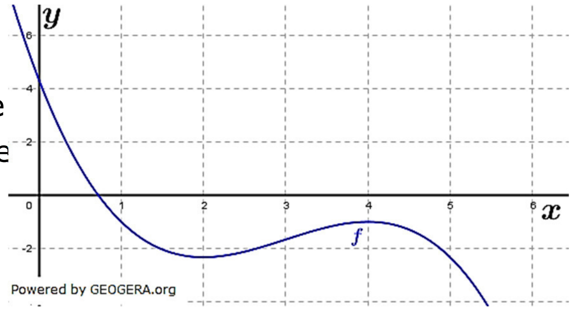
Beschreiben Sie das Ereignis A in Worten.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M07

Ein Punkt P wird an einer Ebene E gespiegelt. Erläutern Sie, wie man die Koordinaten des Bildpunktes P^* erhält.

Aufgabe M08

Die Funktion f mit $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + \frac{13}{3}$ hat den nebenstehenden Graphen.

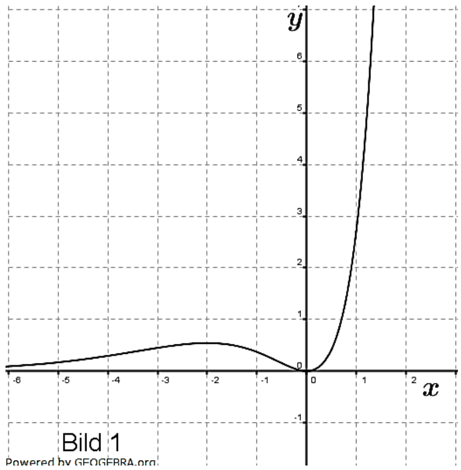


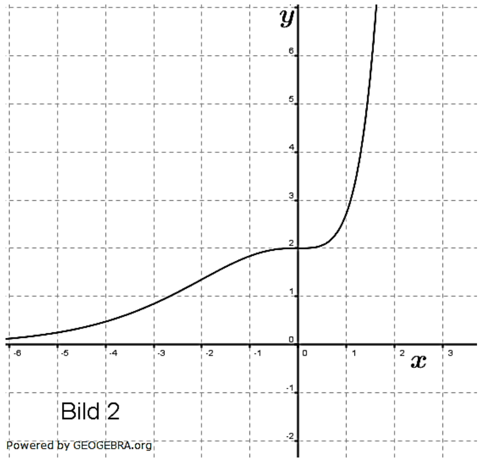
a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + \frac{13}{3} = 0$ nur eine Lösung hat.

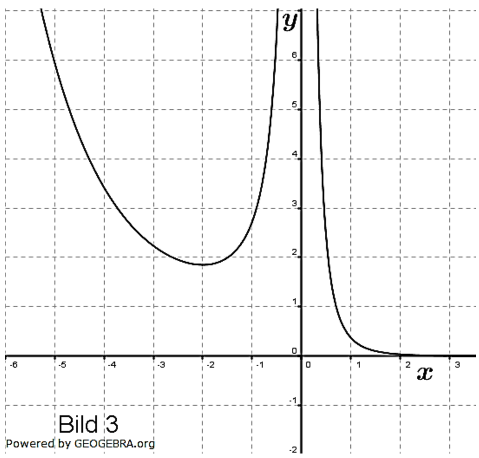
b) Geben Sie einen Wert von q an, so dass die Gleichung $f(x) = q$ drei Lösungen hat.

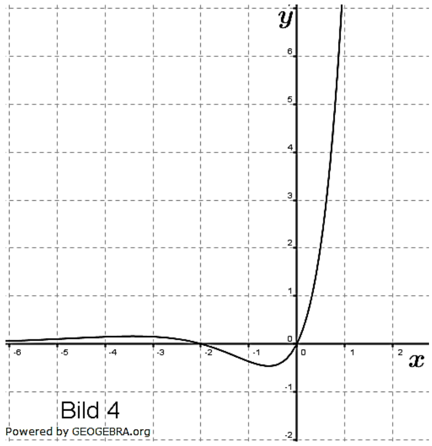
Aufgabe M09

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.









a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(Quelle Abitur BW 2005)

Aufgabe M10

Die täglich laufenden Kosten einer Firma werden durch die Funktion $k(t)$ dargestellt. Dabei ist t die Zeit in Tagen seit dem 1. Januar 2015.
Was bedeutet dann in diesem Sachzusammenhang $\int_0^{120} k(t)\,dt$ bzw. $\frac{1}{120}\int_0^{120} k(t)\,dt$?

Aufgabe M11

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g die in E liegt.
Beschreiben Sie eine Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

Aufgabe M12

Die folgenden Zeilen zeigen einen Teil der Lösung einer Aufgabe.

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$2\cdot(4+r) - (3+4r) + 4(-2+2r) - 3 = 0$$

a) Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. Was war bei dieser Aufgabe gegeben?

b) Lösen Sie die Aufgaben vollständig.

Abitur-Musteraufgaben Beschreiben und Begründen (Pflichtteil) ab 2019

Lösung M01

Lösung einfach:

Die Ebene F liegt in der Mitte der gegebenen Ebenen E_1 mit $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ und E_2 mit $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_2$

Die Ebene F hat dann die Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = \frac{d_1+d_2}{2}$.

Lösung umständlich (Vorschlag des Kultusministeriums BW):

- Man wählt beliebige Punkte P_1 auf E_1 und P_2 auf E_2
- Man bestimmt den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$.
- Mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebenen E_1 und E_2 erhält man die Normalengleichung für die gesuchte Ebene $F\colon \left(\vec{x} - \overrightarrow{OM}\right) \circ \vec{n} = 0$.

Lösung M02

- Man wählt einen beliebigen Punkt P auf E
- Man bestimmt den Einheitsvektor des Normalenvektors $\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$.
- Man bestimmt einen Punkt Q und R mit Abstand 3 zu P über: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{3}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$ bzw. $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \frac{3}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$
- Damit erhält man die Normalengleichung(en) für die gesuchte(n) Ebene(n) $F_1\colon \left(\vec{x} - \overrightarrow{OQ}\right) \circ \vec{n} = 0$ bzw. $F_2\colon \left(\vec{x} - \overrightarrow{OR}\right) \circ \vec{n} = 0$.

Lösung M03

- Man stellt die Parametergleichung der Ebene E auf, in der das Parallelogramm $ABCD$ liegt mit $E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$
- Wir machen eine Punktprobe mit P in E.
- Erfüllt der Punkt P die Ebenengleichung, so liegt P in E.
- Ist zusätzlich noch $0 < r; s < 1$, so liegt P innerhalb des Parallelogramms.

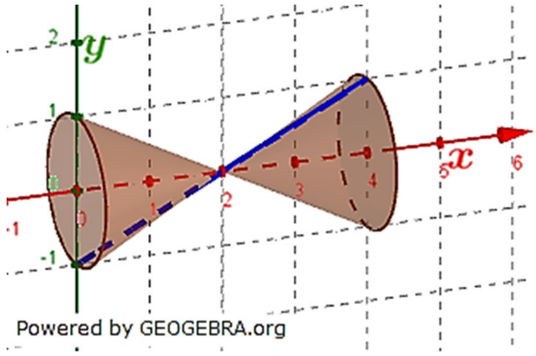
Lösung M04

a) $f(x) > 0$ Das Schaubild verläuft nur oberhalb der x-Achse.
$f'(x) > 0$ Das Schaubild ist streng monoton steigend.
$f''(x) < 0$ Das Schaubild ist rechtsgekrümmt.

b) $f''(x) < 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' < 0 \Rightarrow$ der Graph der ersten Ableitung ist streng monoton fallend.
Das Schaubild einer Funktion, deren Steigung durchwegs abnimmt, ist rechtsgekrümmt.

Lösung M05

Die Funktionsgleichung des Integranden mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ist eine Gerade. Diese rotiert im Intervall $I = [0; 4]$ um die x-Achse.
Dabei entsteht ein Doppelkegel mit einem Grundkreisradius von $r = 1$ und der Höhe $h = 2$ bei beiden Kegeln.



Lösung M06

Bernoulliexperiment mit Stichprobenumfang $n = 15$ und $p = 0{,}6$ für Erfolg.
A: „Bei 15 Wiederholungen höchstens 12 Mal Erfolg haben."

Lösung M07

- Man bildet eine Gerade g mit dem Aufpunkt P und dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E als Richtungsvektor.
- Man schneidet die Gerade g mit der Ebene E und erhält den Lotfußpunkt L.
- Die Koordinaten des Spiegelpunktes P' erhält man dann über: $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$.

Lösung M08

a) Mit der Gleichung $-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + \frac{13}{3} = 0$ berechnet man die Nullstellen von f. Aus der Graphik lesen wir ab, dass nur eine Nullstelle existiert.

b) Aus der Graphik erkennen wir, dass die gegebene Funktion insgesamt drei Funktionswerte -2 besitzt. Verschieben wir die Funktion um 2 Stellen nach oben, entstehen dadurch 3 Nullstellen.

$$q = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + \frac{13}{3} + 2$$
$$q = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + \frac{19}{3}$$

Lösung M09

a) Wegen x^2 hat das Schaubild der gegebenen Funktion bei $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle. Keine der Abbildungen 2 bis 4 verfügt dort über diese doppelte Nullstelle.

b) Bild 4 ist das Schaubild der Funktion f'. f hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen. Extremstellen führen in der Ableitung zu Nullstellen. Dies ist nur bei Bild 4 der Fall.
Bild 2 ist das Schaubild der Funktion F. Wendepunkte einer Funktion führen zu Extremstellen in der Ableitung. F hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen, Bild 1 mit dem Schaubild der Ableitung von F hat dort Extremstellen.
Bild 3 ist das Schaubild der Funktion g mit einer Polstelle bei $x_0 = 0$.

Lösung M10

$\int_0^{120} k(t)\,dt$ bedeutet im Sachzusammenhang die Gesamtkosten des Unternehmens von 120 Tagen seit dem 1. Januar 2015.
$\frac{1}{120}\int_0^{120} k(t)\,dt$ sind dann die Durchschnittskosten der ersten 120 Tage pro Tag.

Lösung M11

Die Gerade h hat denselben Aufpunkt wie die Gerade g.
Der Richtungsvektor von g sei $\vec{u}$, der von h sei $\vec{v}$.
Für den Richtungsvektor $\vec{v}$ muss gelten, dass er sowohl orthogonal zum Vektor $\vec{u}$ als auch zum Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ stehen muss.
Über die beiden Bedingungen $\vec{v} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{v} \circ \overrightarrow{n_E} = 0$ lässt sich $\vec{v}$ bestimmen.

Lösung M12

a) Gegeben sind die Gerade g und eine Ebene E mit $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3 = 0$.
Die Gerade g wird mit E geschnitten, gesucht ist der Schnittpunkt von g mit E.

b) $2 \cdot (4 + r) - (3 + 4r) + 4(-2 + 2r) - 3 = 0$
$8 + 2r - 3 - 4r - 8 + 8r - 3 = 0$
$6r - 6 = 0$
$r = 1$
$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$
g schneidet E in $S(5|7|0)$