Abitur-Musteraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil)
ab 2019

Lösungshinweise für alle Aufgaben

Aufgaben zum grafischen Differenzieren bzw. Integrieren lösen wir mithilfe der sogenannten

	NEW-Regel						
Differenzieren ↓	$F(x)$	N_{VZW}	E	W			↑
	$f(x)$		N_{VZW}	E	W		
	$f'(x)$			N_{VZW}	E	W	Integrieren

N_{VZW} = Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, E = Extremstelle, W = Wendestelle
$F(x)$=Stammfunktion, $f(x)$=1. Ableitung von F, $f'(x)$=2. Ableitung von F

Weiterhin gilt:

- Verläuft f oberhalb der x–Achse, so ist F streng monoton steigend.
- Verläuft f unterhalb der x–Achse, so ist F streng monoton fallend.
- Ist f' negativ, so ist F rechtsgekrümmt.
- Ist f' positiv, so ist F linksgekrümmt.

Lösung M01

a) *An der Stelle 0 hat das Schaubild von f einen Hochpunkt.*
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle 0 eine Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„.

b) *Für $0 \leq x \leq 2$ ist $f(x) \leq 0$.*
Die Aussage ist unentscheidbar, weil jede Funktion h mit $h(x) = f(x) + C$ eine Stammfunktion von f' ist.

c) *Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung für $-1 \leq x \leq 1$.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' ist im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ punktsymmetrisch, damit ist das Schaubild der Stammfunktion im Intervall achsensymmetrisch.

d) *An der Stelle 2 hat das Schaubild von f einen Wendepunkt.*
Die Aussage ist war, da f' an dieser Stelle ein Extremum hat.

Lösung M02

a) Das Schaubild von f hat im dargestellten Bereich zwei Extremstellen, da f' zwei Nullstellen mit VZW aufweist.
Das Schaubild von f hat im dargestellten Bereich zwei Wendestellen, da f' zwei Extremstellen aufweist.
Über Nullstellen von f kann keine Aussage getroffen werden, weil jede Funktion h mit $h(x) = f(x) + C$ eine Stammfunktion von f' ist

b) $\int_{-2}^{3} f'(x)\,dx < 0$.
Die unterhalb der x-Achse liegende Fläche zwischen dem Schaubild von f' und der x-Achse über dem Intervall $[-2; 1]$ hat einen deutlich größeren Flächeninhalt als die über der x-Achse liegende Fläche über dem Intervall $[1; 3]$. Da die unterhalb liegende Fläche ein negatives Integral besitzt, ist die Ungleichung richtig.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M03

a) *Bei $x = 0$ besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = 0$ einen Extrempunkt. Nur Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitungsfunktion.

b) *Bei $x = -2$ besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.*
Die Aussage ist wahr. f' hat bei $x = -2$ eine Nullstelle mit VZW.

c) *Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild von f' hat bei $x_0 = 0$ eine Extremstelle, die bei f zu einer Wendestelle führt.

d) $f(x) > 0$ für $x > -2$.
Die Aussage ist unentscheidbar, weil jede Funktion h mit $h(x) = f(x) + C$ eine Stammfunktion von f' ist.

Lösung M04

a) *Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.*
Die Steigung von f ist für $x > 0$ kleiner als 1. Da $g(x) > 2$ für $x > 0$ scheidet g als Ableitung von f aus. Somit gilt $g'(x) = f(x)$.

b) $g(x) = e^{ax} + b$
Aus der Graphik lesen wir ab:
$g(0) = 3$ und $g'(0) = f(0) = -0{,}5$.
$g(0) = e^0 + b = 3$
$b = 2$
$g'(x) = a \cdot e^{ax}$
$a \cdot e^0 = -0{,}5$
$a = -0{,}5$
$g(x) = e^{-0{,}5x} + 2$.

Lösung M05

a) Die Funktion x ist wegen des Nenners $1 + x^2$ achsensymmetrisch. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$ hat sie die waagrechte Asymptote $y = -1$. Dies ist nur in Abbildung 2 der Fall.
Der Graph der Funktion schneidet die y–Achse in $S_y(0|2)$, also $f(0) = 2$.
$2 = \frac{a}{1+0} - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

b) Extrempunkte von f führen zu Nullstellen von f'. f besitzt eine einzige Extremstelle bei $x = 0$ als Hochpunkt. Die Nullstelle von f' muss also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ aufweisen. Dies ist nur in Abbildung 3 der Fall.
Abbildung 3 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.
Extremstellen der Stammfunktion führen zu Nullstellen der Ableitungsfunktion. Wendepunkte der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitungsfunktion. Dies ist sowohl in Abbildung 1 als auch in Abbildung 4 der Fall.
Wegen $I(x) = \int_2^x f(t)dt$ muss gelten $I(2) = \int_2^2 f(t)dt$. Da jedoch $\int_2^2 f(t)dt = 0$, muss $I(2) = 0$ sein. Dies ist nur in Abbildung 4 der Fall.
Abbildung 4 ist das Schaubild der Integralfunktion I.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M06

$f(x) > 0$

Der Funktionsgraph verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x-Achse.

$f'(x) > 0$

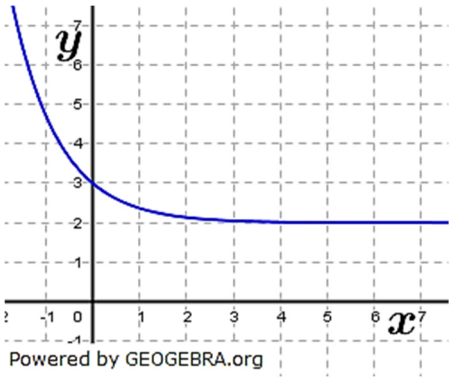
Der Funktionsgraph ist im angegebenen Intervall streng monoton fallend.

$f''(x) > 0$

Der Funktionsgraph ist im angegebenen Intervall linksdrehend.

Möglicher Verlauf

z.B. $f(x) = e^{-x} + C$ (siehe Graphik).



Lösung M07

a) *Die Funktion f ist streng monoton im Intervall $[-5;5]$.*
Die Aussage ist falsch, der Graph ist von $[-5;0]$ monoton steigend und von $[0;5]$ monoton fallend.

b) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.
Die Aussage ist richtig, f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Extremstelle.

c) *Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.*
Die Aussage ist falsch, f' ist achsensymmetrisch, somit ist f punktsymmetrisch zum Wendepunkt an der Stelle $x = 0$.

d) *Der Graph von f hat im Intervall $[-5;5]$ zwei Tangenten, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verlaufen.*
Die Aussage ist richtig. f' hat zwei Stellen mit dem Funktionswert $f'(x) = 1$.

e) *Der Graph von f verläuft im Intervall $[-5;5]$ oberhalb der x-Achse.*
Die Aussage ist nicht entscheidbar, weil jede Funktion h mit $h(x) = f(x) + C$ eine Stammfunktion von f' ist.

Lösung M08

Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor durch:

1. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = 2$;
2. Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ nach links.
3. Verschiebung in y-Richtung um eine Stelle nach oben.

Lösung M09

Wenn $F(x) = \int_{-4}^{x} (t+1) \cdot e^{-t}\, dt$ gilt, dann muss f mit $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ die erste Ableitung von F sein. Damit ist f' die zweite Ableitung von F.

$f'(x) = e^{-x} - (x+1) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1 - x - 1) = -x \cdot e^{-x}$

Hoch- bzw. Tiefpunkte mit $f(x) = 0$:

$(x+1) \cdot e^{-x} = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x = -1$

$f'(-1) = 1 \cdot e > 0$

F hat an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt, es ist die einzigste Extremstelle.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Wendepunkte mit $f'(x) = 0$:
$-x \cdot e^{-x} = 0$
$x = 0$
F hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.

Lösung M10

Der Graph von f hat einen Tiefpunkt, weil f' im abgebildeten Bereich eine Nullstelle mit VZW von „-„ nach „+" aufweist.
Der Graph von f hat einen Wendepunkt mit positiver Steigung, weil f' im abgebildeten Bereich einen Hochpunkt aufweist mit einem Funktionswert größer als Null.
Der Tiefpunkt liegt an der Stelle $x = 1$, der Wendepunkt an der Stelle $x = 2$.

Lösung M11

a) *Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -2$ einen Extrempunkt. Nur Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitungsfunktion. Wegen des Berührpunkts von f' mit der x–Achse liegt in f sogar ein Sattelpunkt vor.

b) *Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.*
Die Aussage ist wahr. f' hat im angegebenen Intervall genau zwei Extremstellen, die bei f zu Wendepunkten führen.

c) *Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y–Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.*
Die Aussage ist wahr. Aus dem Schaubild von f' liest man für $x_0 = 0$ die Steigung $m = 4$ von f ab. Die 1. Winkelhalbierende hat die Steigung $m = 1$.

d) $f(0) > f(5)$.
Die Aussage ist falsch. Die Ableitungskurve f' verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x–Achse, f ist in diesem Intervall somit streng monoton steigend. $f(0)$ muss somit kleiner als $f(5)$ sein.

Lösung M12

a) Die Funktionswerte des Schaubildes von f sind für $-3 \leq x \leq 1$ positiv, also ist F in diesem Bereich monoton wachsend.

b) f hat für $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt. Also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen, wobei die Nullstelle bei $x_0 = 0$ (Sattelpunkt) sogar eine doppelte Nullstelle ist.

c) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0)$. Aus dem Schaubild liest man ab:
$f(3) = 0$ und $f(0) = 1$, also $f(3) - f(0) = -1 = \int_0^3 f'(x)dx$

d) $O(0|0)$ ist Sattelpunkt von f. Dieser führt zu einem Extremwert, der die x–Achse berührt, und gleichzeitig zu einer Nullstelle bei f' wird. Die Steigung links und rechts des Sattelpunktes ist negativ, also berührt die Extremstelle von f' die x–Achse von unten, es liegt kein Vorzeichenwechsel vor, der Extrempunkt muss ein Hochpunkt sein.