*Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2019 BW*

*Dokument mit 7 Aufgaben*

## Aufgabe A1

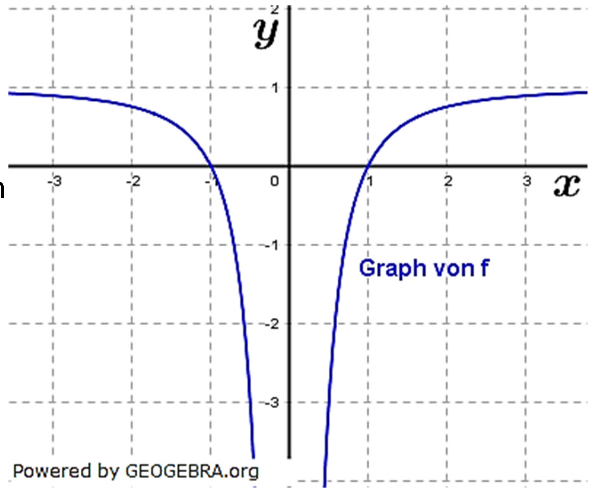
Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f$ mit $f(x) = x^4 \cdot sin(3x)$.

## Aufgabe A2

Lösen Sie die Gleichung $(cos(x))^2 + 2cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$.

## Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat.
Die Abbildung zeigt den Graphen von $f$, der symmetrisch bezüglich der $y$-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade $g$ mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

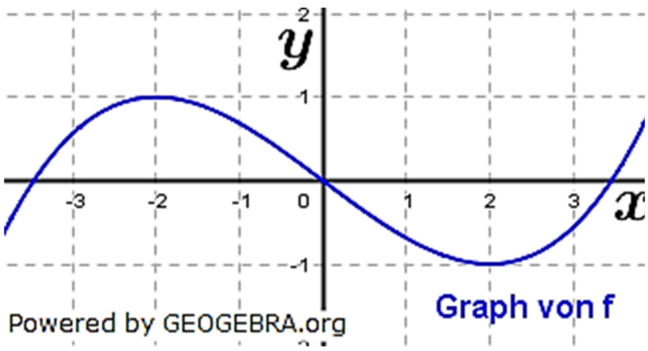



a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen $g$ den Graphen von $f$ schneidet, die $f$ -Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

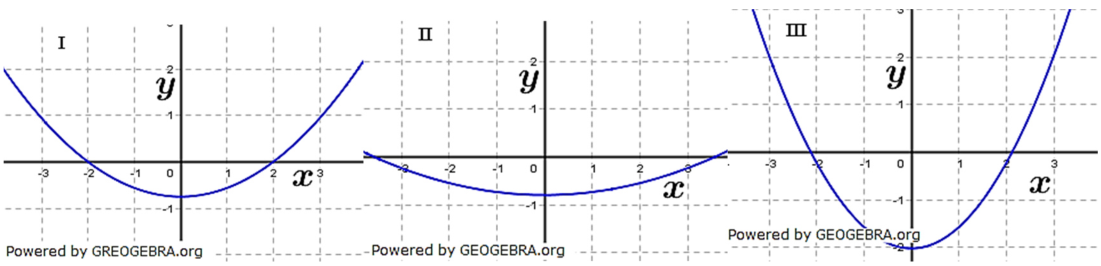
b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f$, die $x$-Achse und die Gerade $g$ einschließen.

## Aufgabe A4

Die Abbildung zeigt den Grafen einer Funktion $f$.




a) Einer der folgenden Graphen $I$, $II$ und $III$ gehört zur ersten Ableitungsfunktion von $f$.
Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.




b) Die Funktion $F$ ist eine Stammfunktion von $f$. Geben Sie das Monotonieverhalten von $F$ im Intervall $[1; 3\}$ an.

Begründen Sie Ihre Angabe.

*Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2019 BW*

## Aufgabe A5

Gegeben sind die Gerade $g$ und die Ebene $E$ durch

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$

a) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von $g$ und $E$.

b) Die Gerade $h$ entsteht durch Spiegelung der Geraden $g$ an der Ebene $E$. Bestimmen Sie eine Gleichung von $h$.

## Aufgabe A6

Gegeben ist die Gerade $g$ durch $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem $g$ die $x_2x_3$-Ebene schneidet.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-3|-1|7)$ von der Geraden $g$.

## Aufgabe A7

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Man zieht genau zwei Kugeln".

B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel".

## Lösung A1

$f(x) = x^4 \cdot sin(3x)$ Produkt- und Kettenregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = x^4$ $u' = 4x^3$
$v = sin(3x)$ $v' = 3cos(3x)$
$f'(x) = 4x^3 \cdot sin(3x) + 3x^4 \cdot cos(3x)$

## Lösung A2

$(cos(x))^2 + 2cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ Faktorisieren und Satz vom Nullprodukt

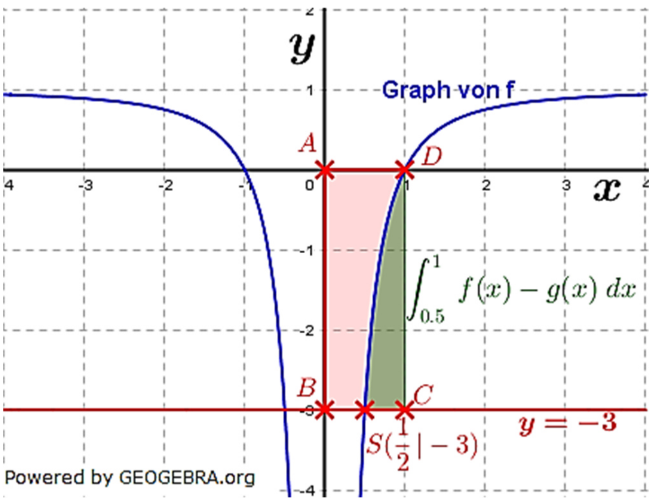
$cos(x) \cdot (cos(x) + 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$cos(x) = 0$
$x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$
$cos(x) + 2 = 0$ | $-2$
$cos(x) = -2$
Wegen $\mathbb{W}_{cos} = \{-1; 1\}$ keine Lösung
$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$

## Lösung A3

Lösungslogik

a) Berechnung der Schnittstelle $S_1$ durch Gleichsetzung von $f$ und $g$.

b) Die gesuchte Fläche ist doppelt so groß wie die rot hinterlegte Fläche in nebenstehender Grafik. Wir erhalten diese über die Differenz der Rechteckfläche $ABCD$ und der Fläche zwischen $f$ und $g$ Intervall $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (grün markierte Fläche). Der Graph von ist achsensymmetrisch, sodass die gesuchte Fläche das Doppelte der berechneten Fläche ist.




Klausuraufschrieb

a) $f \cap g$
$1 - \frac{1}{x^2} = -3$ | $-1$
$-\frac{1}{x^2} = -4$
$x^2 = \frac{1}{4}$ | $\sqrt{\ }$
$x_1 = \frac{1}{2};\quad x_2 = -\frac{1}{2}$ **q.e.d.**

b) $A = 2 \cdot \left(A_{ABCD} - \left|\int_{0,5}^{1} f(x) - g\ dx\right|\right)$
$= 2 \cdot \left(1 \cdot 3 - \int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{1}{x^2} - (-3)\right) dx\right)\ 2 \cdot \left(3 - \left[4x + \frac{1}{x}\right]_{0,5}^{1}\right) = 2 \cdot (3 - (5 - 4) = 4$

*Die Fläche ist $4\ FE$ groß.*

## Lösung A4

a) Graph $I$ ist der Graph der Ableitungsfunktion von $f$.
$f$ hat bei $x = -2$ einen Hochpunkt und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Dies führt in der Ableitungsfunktion zu Nullstellen mit VZW und zwar bei $x = -2$ von "+" nach " $-$ " und bei $x = 2$ von " $-$ " nach " $+$ ". Somit scheidet Abbildung $II$ aus.
Die Steigung im Wendepunkt von $f$ bei $x = 0$ ist größer als $-1$. Somit scheidet auch Abbildung $III$ aus.

b) Die Funktion $F$ ist im Intervall $[1; 3]$ streng monoton fallend, da der Graph von $f$ in diesem Intervall unterhalb der $x$-Achse verläuft.

## Lösung A5

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$

### Lösungslogik

a) Untersuchung, ob die Gerade parallel zur Ebene verläuft über das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von $g$ und Normalenvektor von $E$.

b) Zur Spiegelung von $g$ an $E$ für benötigen wir zunächst den Lotfußpunkt $L$ vom Aufpunkt $P$ der Geraden $g$ zur Ebene $E$. Der Stützvektor $\vec{v}$ von $h$ errechnet sich dann nach der Formel $\vec{v} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$ mit $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor von $g$ und $\overrightarrow{PL}$ als Vektor vom Aufpunkt von $g$ zum Lotfußpunkt auf $E$.
Die Spiegelgerade $h$ hat dann die Gleichung $h\colon \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$

---

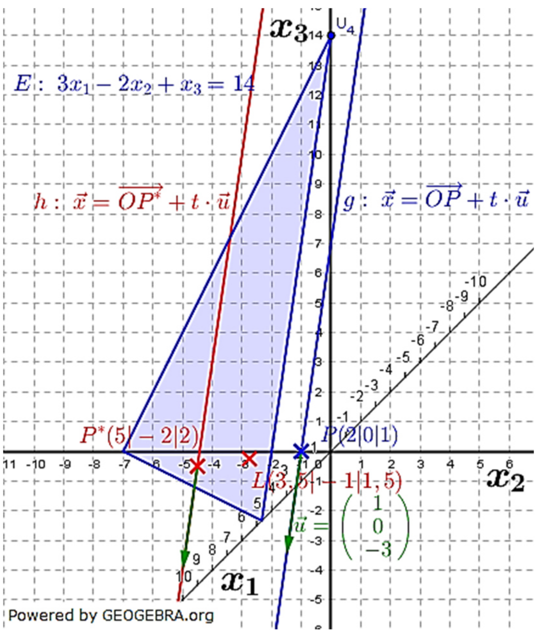
### Klausuraufschrieb

a) gegenseitige Lage von $g$ und $E$:
Prüfung auf Parallelität von $g$ und $E$ :

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} =$ verläuft $g \parallel E$.




b) Spiegelgerade $h$:
Lotfußpunkt vom Aufpunkt $P$ der Geraden $g$ zur Ebene $E$:
Hilfsgerade $j$ durch $P$ mit dem Normalenvektor von $E$ als Richtungsvektor:

$j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$j \cap E$:
$x_1 = 2 + 3s;\ \ x_2 = -2s;\ \ x_3 = 1 + s$
$x_1;\ x_2;\ x_3 \to E$:
$3 \cdot (2 + 3s) - 2 \cdot (-2s) + 1 + s = 14$
$6 + 9t + 4t + 1 + t = 14$
$7 + 14t = 14 \ => \ \ t = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

# Lösung A6

## Lösungslogik

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$

a) Ermittlung des Schnittpunktes der Geraden $g$ mit der $x_2x_3$-Ebene, dort ist $x_1 = 0$.

b) Abstand Punkt-Gerade über die Abstandsformel.

---

## Klausuraufschrieb

a) Spurpunkt mit der $x_2x_3$-Ebene, dort ist $x_1 = 0$:

$4 + t = 0$

$t = -4$

$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

*Der Schnittpunkt der Geraden $g$ mit der $x_2x_3$-Ebene hat die Koordinaten $S_1(0|2|-5)$.*

b) Abstand $P(-3|-1|7)$ von $g$:

$d(P;g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $A(4|-6|3)$ als Aufpunkt von und $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor von $g$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}$

$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{27}{3} = 9$

*Der Abstand des Punktes $P$ von der Geraden $g$ beträgt $9\ LE$.*

## Lösung A7

Aufstellung der Ergebnisräume und Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

A: „Man zieht genau zwei Kugeln".

$S(A) = \{\overline{s}; s\}$

$P(A) = P(\overline{s}; s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 30\ \%$

B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel".

$S(B) = \{(r; s), (r; w; s), (w; r; s)\}$

$P(B) = P(r; s) + P(r; w; s) + P(w; r; s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$

$P(B) = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\ \%$