Lösung A1

$f(x) = x^4 \cdot sin(3x)$ Produkt- und Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$

$u = x^4$ $u' = 4x^3$

$v = sin(3x)$ $v' = 3cos(3x)$

$f'(x) = 4x^3 \cdot sin(3x) + 3x^4 \cdot cos(3x)$

Lösung A2

$(cos(x))^2 + 2cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ Faktorisieren und Satz vom Nullprodukt

---

$cos(x) \cdot (cos(x) + 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$cos(x) = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2};\ \ x_2 = \frac{3}{2}\pi$

$cos(x) + 2 = 0$ | -2

$cos(x) = -2$

Wegen $\mathbb{W}_{cos} = \{-1; 1\}$ keine Lösung

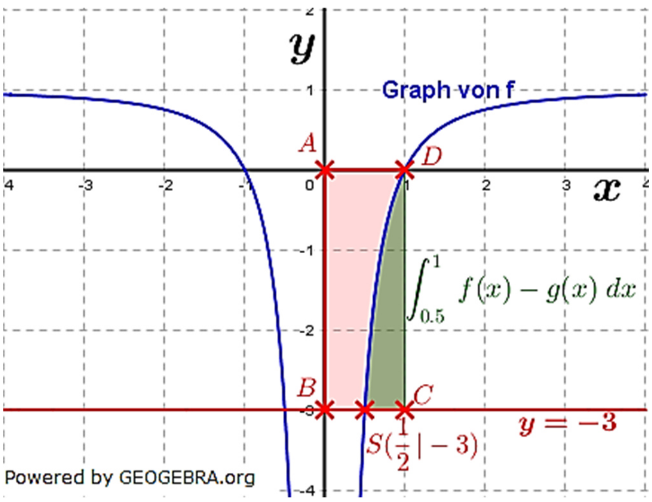
$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$

Lösung A3

Lösungslogik

a) Berechnung der Schnittstelle S_1 durch Gleichsetzung von f und g.

b) Die gesuchte Fläche ist doppelt so groß wie die rot hinterlegte Fläche in nebenstehender Grafik. Wir erhalten diese über die Differenz der Rechteckfläche $ABCD$ und der Fläche zwischen f und g Intervall $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (grün markierte Fläche). Der Graph von ist achsensymmetrisch, sodass die gesuchte Fläche das Doppelte der berechneten Fläche ist.



Klausuraufschrieb

a) $f \cap g$

$1 - \frac{1}{x^2} = -3$ | -1

$-\frac{1}{x^2} = -4$

$x^2 = \frac{1}{4}$ | $\sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{1}{2};\ \ x_2 = -\frac{1}{2}$ **q.e.d.**

b) $A = 2 \cdot \left(A_{ABCD} - \left|\int_{0,5}^{1} f(x) - g\ dx\right|\right)$

$= 2 \cdot \left(1 \cdot 3 - \int_{0,5}^{1}\left(1 - \frac{1}{x^2} - (-3)\right)dx\right)\ 2 \cdot \left(3 - \left[4x + \frac{1}{x}\right]_{0,5}^{1}\right) = 2 \cdot (3 - (5 - 4) = 4$

Die Fläche ist $4\ FE$ groß.

Lösung A4

a) Graph I ist der Graph der Ableitungsfunktion von f.
f hat bei $x = -2$ einen Hochpunkt und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Dies führt in der Ableitungsfunktion zu Nullstellen mit VZW und zwar bei $x = -2$ von "+" nach " $-$ " und bei $x = 2$ von " $-$ " nach " $+$ ". Somit scheidet Abbildung II aus.
Die Steigung im Wendepunkt von f bei $x = 0$ ist größer als -1. Somit scheidet auch Abbildung III aus.

b) Die Funktion F ist im Intervall $[1; 3]$ streng monoton fallend, da der Graph von f in diesem Intervall unterhalb der x-Achse verläuft.

Lösung A5

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ $\qquad E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$

Lösungslogik

a) Untersuchung, ob die Gerade parallel zur Ebene verläuft über das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von g und Normalenvektor von E.

b) Zur Spiegelung von g an E für benötigen wir zunächst den Lotfußpunkt L vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E. Der Stützvektor $\vec{v}$ von h errechnet sich dann nach der Formel $\vec{v} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$ mit $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor von g und $\overrightarrow{PL}$ als Vektor vom Aufpunkt von g zum Lotfußpunkt auf E.
Die Spiegelgerade h hat dann die Gleichung $h\colon \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.$

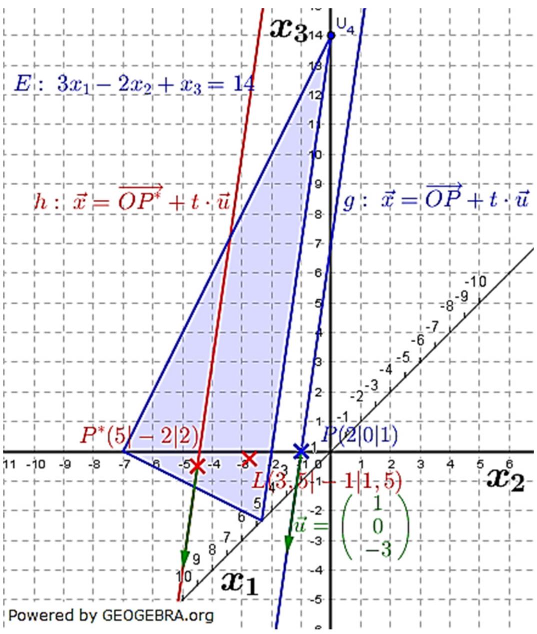
Klausuraufschrieb

a) gegenseitige Lage von g und E:
Prüfung auf Parallelität von g und E :

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 3 = 0$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} =$ verläuft $g \parallel E$.



b) Spiegelgerade h:
Lotfußpunkt vom Aufpunkt P der Geraden g zur Ebene E:
Hilfsgerade j durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor:

$j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$j \cap E$:
$x_1 = 2 + 3s;\ \ x_2 = -2s;\ \ x_3 = 1 + s$
$x_1;\ x_2;\ x_3 \to E$:
$3 \cdot (2 + 3s) - 2 \cdot (-2s) + 1 + s = 14$
$6 + 9t + 4t + 1 + t = 14$
$7 + 14t = 14 \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung A6

Lösungslogik

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Ermittlung des Schnittpunktes der Geraden g mit der x_2x_3-Ebene, dort ist $x_1 = 0$.

b) Abstand Punkt-Gerade über die Abstandsformel.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkt mit der x_2x_3-Ebene, dort ist $x_1 = 0$:

$4 + t = 0$

$t = -4$

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der Geraden g mit der x_2x_3-Ebene hat die Koordinaten $S_1(0|2|-5)$.

b) Abstand $P(-3|-1|7)$ von g:

$d(P;g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ mit $A(4|-6|3)$ als Aufpunkt von und $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor von g.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$d(P;g) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{27}{3} = 9$$

Der Abstand des Punktes P von der Geraden g beträgt $9\ LE$.

Lösung A7

Aufstellung der Ergebnisräume und Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

A: „Man zieht genau zwei Kugeln".

$S(A) = \{\overline{s}; s\}$

$P(A) = P(\overline{s}; s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 30\ \%$

B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel".

$S(B) = \{(r; s), (r; w; s), (w; r; s)\}$

$P(B) = P(r; s) + P(r; w; s) + P(w; r; s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$

$P(B) = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\ \%$