Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2019 Nachtermin BW

Dokument mit 7 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 3)^8$.

Aufgabe A2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3x+1} + 5;\ x > 0$.

Aufgabe A3

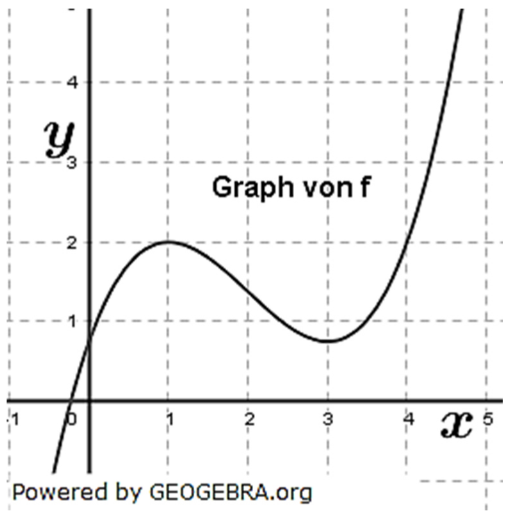
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und den Wendepunkt $W(1|-2)$.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

Aufgabe A4

Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen
(1) Der Graph jeder Stammfunktion von f besitzt für $-1 \leq x \leq 4$ einen Hochpunkt.
(2) $f'(f(4)) < 0$

b) Die Funktion g ist gegeben durch
$$g(x) = x^2 \cdot f(x).$$
Bestimmen Sie $g'(1)$.



Aufgabe A5

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 12$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Die Ebene F entsteht durch Spiegelung von E an der x_1x_2-Ebene. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F.

Aufgabe A6

Gegeben sind die Punkte $P(5|4|3)$, $Q(1|3|4)$ und $R(6|0|3)$ sowie die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}$. Die Punkte P und Q liegen auf der Geraden h.

a) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermitteln Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeigen Sie dass das Dreieck PQR bei P einen rechten Winkel besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der das Dreieck PQR zu einem Rechteck ergänzt.

Aufgabe A7

In einer Urne befinden sich blaue und rote Kugeln, insgesamt 15 Stück. Es wird 12 mal zufällig eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Eine der drei folgenden Abbildungen zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

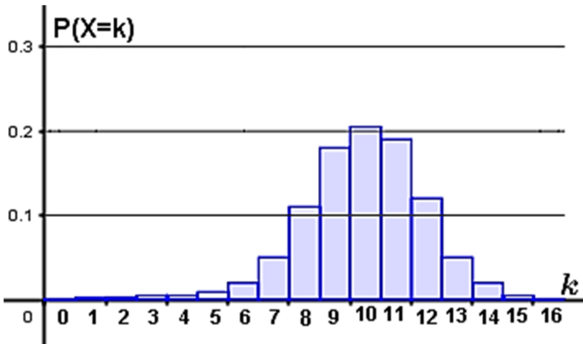


Abb. 1

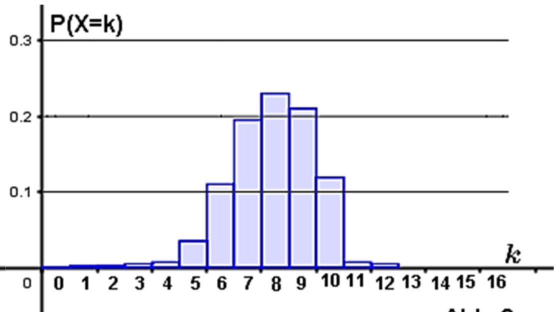


Abb. 2

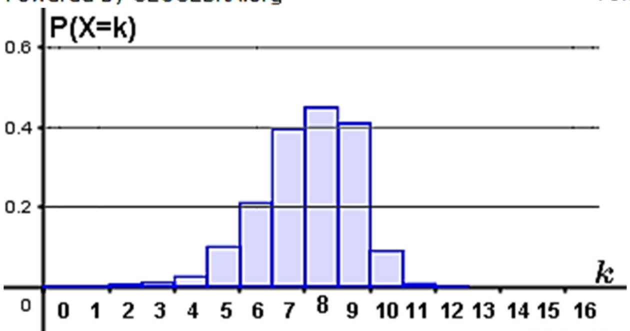


Abb. 3

a) Begründen Sie, dass Abbildung 1 und Abbildung 3 nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellen.

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig.
Bestimmen Sie die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.

Lösung A1

$f(x) = (\sin(x) + 3)^8$ Potenz- und Kettenregel erforderlich

---

$f'(x) = 8(\sin(x) + 3)^7 \cdot \cos(x)$

Lösung A2

$f(x) = \frac{1}{3x+1} + 5;\; x > 0$

$F(x) = \frac{1}{3} \ln(|3x + 1|) + 5x$

Lösung A3

Lösungslogik

Wegen ganzrationaler Funktion 3. Grades benötigen wir 4 Bedingungen, die wir aus dem Aufgabentext herleiten müssen.

Klausuraufschrieb

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen aus Aufgabentext:

$f(0) = 0$	|	Punktprobe mit Ursprung
$f'(0) = 0$	|	Hochpunkt im Ursprung
$f(1) = -2$	|	Punktprobe mit Wendepunkt
$f''(1) = 0$	|	Bedingung für Wendepunkt

Aus $f(0) = 0$ folgt $d = 0$.
Aus $f'(0) = 0$ folgt $c = 0$.

(1) $a + b = -2$ | von $f(1) = -2$ $\cdot 2$
(2) $6a + 2b = 0$ | von $f''(1) = 0$
(1) $2a + 2b = -4$
(2) $6a + 2b = 0$

(2)-(1) $4a = 4$ ➔ $a = 1$
$a \to (1)$ $1 + b = -2$ ➔ $b = -3$

Die Funktionsgleichung lautet somit: $f(x) = x^3 - 3x^2$

Lösung A4

a) (1) Die Aussage ist falsch. f hat bei etwa $x_0 = -0{,}3$ eine Nullstelle mit VZW von „−„ nach „+“. Damit hat F an dieser Stelle einen Tiefpunkt.
(2) Die Aussage ist richtig. $f(4) = 2$ (aus Grafik abgelesen). Bei $x_0 = 2$ hat f negative Steigung, also $f'(2) < 0$.

b) $g(x) = x^2 \cdot f(x)$
Für $g'(x)$ wird Produktregel benötigt.
$u = x^2$ $u' = 2x$
$v = f(x)$ $v' = f'(x)$
$g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$
$f(1) = 2;\; f'(1) = 0$
$g'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2 \cdot 0 = 4$

Lösung A5

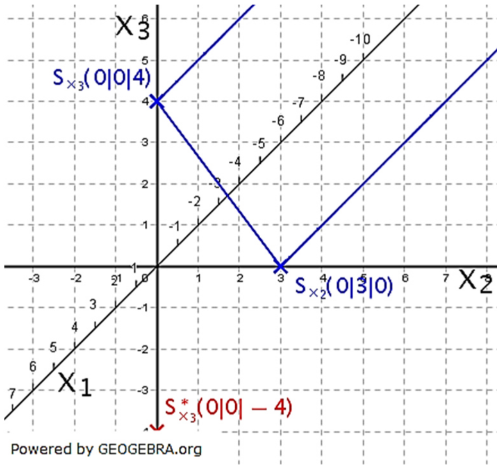
$E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 12$

a) Bestimmung der Spurpunkte:

$S_{x_2}(0|3|0);\quad S_{x_3}(,|0|4)$

Wegen fehlendem Spurpunkt S_{x_1} verläuft die Ebene parallel zur x_1-Achse.

Zeichnung siehe Grafik rechts.



b) Spiegelebene F:

Der Spurpunkt S_{x_2} liegt bereits in der x_1x_2-Ebene, kann somit nicht gespiegelt werden. Der Spiegelpunkt von S_{x_3} ist $S^*_{x3}(0|0|-4)$.

Ein Spurpunkt ist nach wie vor nicht vorhanden.

Ebenengleichung F:

$F\colon\ \frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform; $\cdot 12$

$F\colon\ 4x_2 - 3x_3 = 12$

Lösung A6

a) Aufstellung Gerade h:

$$h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \neq v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind g und h entweder windschief oder schneiden sich.

Prüfung auf Schnittpunkt:

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad -r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $4t + 4r = 3$

(2) $5t + r = 3$

(3) $\underline{-5t - r = 1}$

(2)+(3) $0 \neq 4$

Aus (2)+(3) folgt: Die beiden Geraden sind windschief.

b) Rechtwinkligkeit des Dreiecks PQR bei P:

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 4-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{RP} = 0$ ist das Dreieck PQR bei P rechtwinklig.

c) *Ergänzungspunkt des Dreiecks PQR zu einem Rechteck:*
Wegen Rechtwinkligkeit bei P liegt der Punkt S diagonal zu P, sodass gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Ergänzungspunkt hat die Koordinaten $S(2|-1|4)$.

Lösung A7

a) Abbildung 1 zeigt einen Stichprobenumfang von $k = 16$. Laut Aufgabenstellung ist $k = 12$.
Die Summe der abgebildeten Wahrscheinlichkeiten bei Abbildung 3 ist größer als 1.

b) Aus Abbildung 2 geht hervor: $\mu = n \cdot p = 8$
Mit $n = 12$ ergibt sich $p = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Von 15 Kugeln sind $\frac{2}{3}$ Kugel rot, also somit 10 rote Kugeln.