Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2020 BW

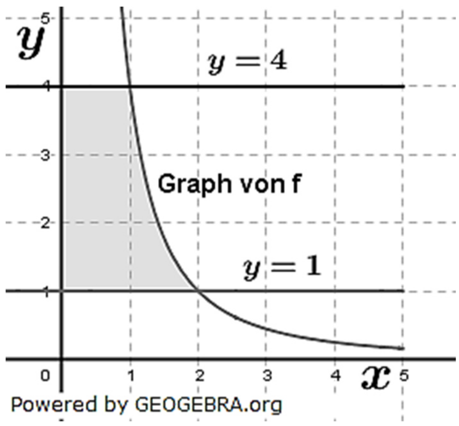
Dokument mit 8 Aufgaben

Aufgabe A1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

Aufgabe A2
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x - 7}$, für die $F(2) = 1$ ist.

Aufgabe A3
Lösen Sie die Gleichung $(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$.

Aufgabe A4
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ im Punkt $P(1|4)$ und die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ im Punkt $Q(2|1)$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

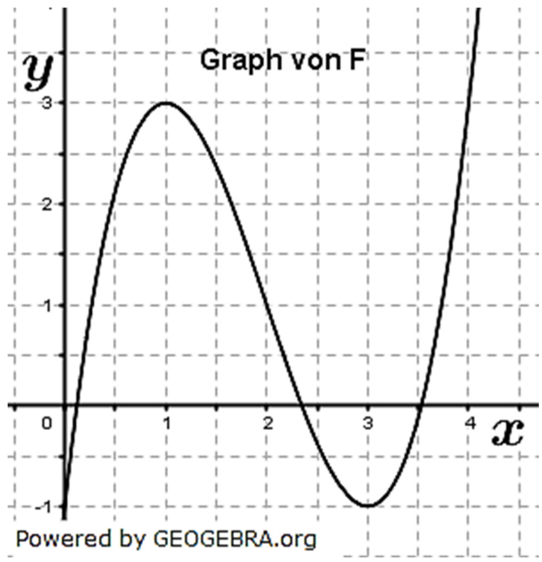


Aufgabe A5
Abgebildet ist der Graph einer Funktion F.
F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f.

a) Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an.

b) Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x)\,dx$.

c) Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ streng monoton fallend ist.



Aufgabe A6
Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E.

Aufgabe A7

Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1-Achse in einem Punkt, der vom Punkt $P(0|2|1)$ den Abstand 3 hat.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

Aufgabe A8

Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen:
Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.

B: Anna gewinnt das Spiel.

Lösung A1

$f(x) = x^4 \cdot sin\,(3x)$ Produkt- und Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = x^4$ $u' = 4x^3$
$v = sin\,(3x)$ $v' = 3cos\,(3x)$
$f'(x) = 4x^3 \cdot sin(3x) + 3x^4 \cdot cos\,(3x)$

Lösung A2

$f(x) = \sqrt{4x-7} = (4x-7)^{\frac{1}{2}}$ Potenzregel erforderlich

---

$F(x) = \frac{(4x-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 4} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-7)^3} + C$
$F(2) = 1$
$1 = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4 \cdot 2 - 7)^3} + C$
$6 = \sqrt{1^3} + C$
$C = 5$
$F(x) = \frac{1}{6}\sqrt{(4x-7)^3} + 5$

Lösung A3

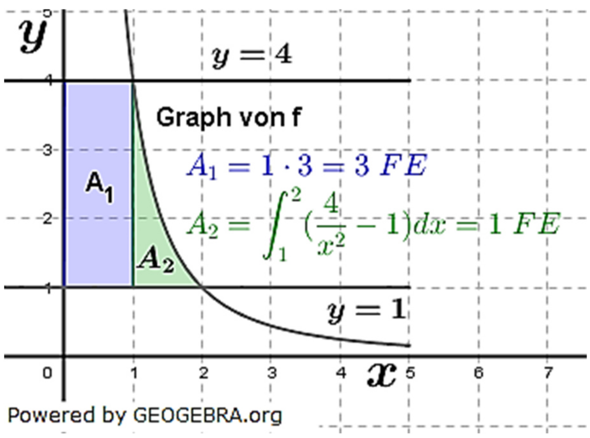
$(x^2 + 8) \cdot (e^{x-1} - 1) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x^2 + 8 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x^2 = -8 \;==>\; \mathbb{L}\{\}$ | keine Lösung
$e^{x-1} - 1 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$e^{x-1} = 1$
$x = 1$, denn $e^{1-1} = e^0 = 1$
$\mathbb{L} = \{1\}$

Lösung A4

Lösungslogik

Wir müssen die gesuchte Fläche aufteilen in ein Rechteck (blaue Fläche) sowie in die Fläche zwischen den Funktionen f und $y = 1$ im Intervall von 1 bis 2 (grüne Fläche).
Die Fläche A_1 erhalten wir als Rechteckfläche, die Fläche A_2 über das Integral zwischen oberer Kurve und unterer Kurve im Intervall $I = [1; 2]$.



Klausuraufschrieb

$A = A_1 + A_2$
A_1: $A_1 = 1 \cdot 3 = 3\,FE$
A_2: $A_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right) dx = \int_1^2 (4 \cdot x^{-2} - 1)\, dx = [-4 \cdot x^{-1} - x]_1^2 = \left[-\frac{4}{x} - x\right]_1^2$
$= -2 - 2 - (-4 - 1) = 1$
$A = A_1 + A_2 = 3 + 1 = 4$
Die Fläche ist $4\,FE$ groß.

Lösung A05/2020

a) Nullstellen von f:
$x_1 = 1;\ \ x_2 = 3$

b) $\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = 1 - 3 = -2$

c) Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0{,}5 \le x \le 1{,}5$.
Wegen $F''(x) = f'(x)$ ist zu begründen, dass $F''(x) < 0$ ist für $0{,}5 \le x \le 1{,}5$.
Dies ist dann der Fall, wenn das Schaubild von F rechtgekrümmt ist.
Dies ist in dem Intervall $0{,}5 \le x \le 1{,}5$ der Fall.

Lösung A6

Lösungslogik

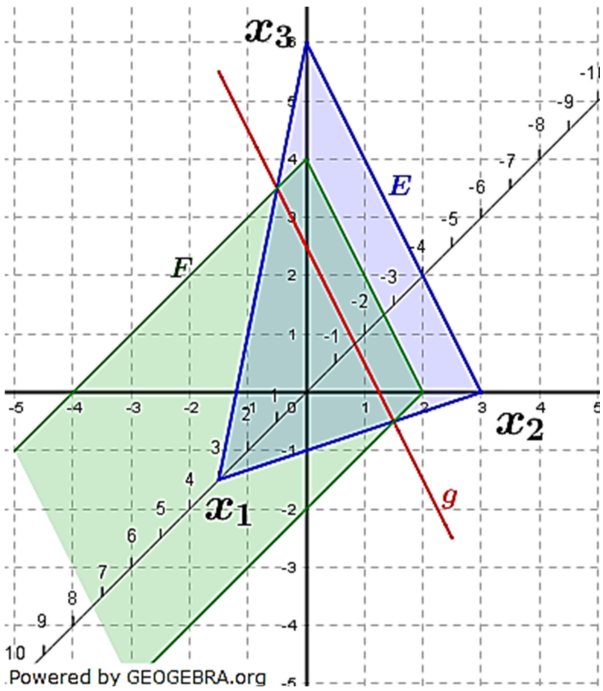
a) Wir berechnen die Spurpunkte von E und F und zeichnen die Ebenen.

b) Wir bilden $E \cap F$. Im Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen wählen wir einen Parameter frei, um zur Parametergleichung der Schnittgeraden zu gelangen.

c) Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ von der Ebene E über die HNF.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:
$Sx_{1_E}(3|0|0);\ \ Sx_{2_E}(0|3|0);\ \ Sx_{3_E}(0|0|6)$
Spurpunkte von F:
$Sx_{2_F}(0|2|0);\ \ Sx_{3_F}(0|0|4)$
Grafik: siehe rechts.



b) $E \cap F$

$\mathrm{I})\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$\mathrm{II})\quad 2x_2 + x_3 = 4$

$x_3 = t.$

$\mathrm{II})\quad 2x_2 + t = 4 \implies x_2 = 2 - \frac{1}{2}t$

$\mathrm{I})\quad 2x_1 + 2(2 - \frac{1}{2}t) + t = 6$

$2x_1 + 4 - t + t = 6$

$2x_1 = 2 \implies x_1 = 1$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $d(0;E) = \frac{|2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4+4+1}} = |-2| = 2$
Der Abstand des Punktes $O(0|0|0)$ zur Ebene E beträgt $2\,LE$.

Lösung A7

Lösungslogik

Die Geradengleichung hat den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor (wegen Orthogonalität).
Der Aufpunkt ist der noch zu bestimmende Schnittpunkt mit der x_1-Achse $Q(q_1|0|0)$.
Dieser Punkt muss den Abstand 3 zum Punkt $P(0|2|1)$ haben.
Berechnung über den Satz des Pythagoras im Raum.

Klausuraufschrieb

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{n_E}$ mit $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

q_1: $\sqrt{(q_1-0)^2 + (0-2)^2 + (0-1)^2} = 3$

$\sqrt{q_1^2 + 4 + 1} = 3 \qquad | \quad ^2$

$q_1^2 + 5 = 9 \qquad | \quad -5$

$q_1^2 = 4$

$q_{1_{1,2}} = \pm 2$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ alternativ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung A8

Beim Spiel handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

$P(s) = \frac{2}{6}$; $P(r) = \frac{4}{6}$ jeweils im ersten Zug.

A: „Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde".

$S(A) = \{\overline{s}s, s\overline{s}, ss\}$

$P(A) = P(\overline{s}s, s\overline{s}, ss) = 1 - P(\overline{s}\overline{s}) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\,\%.$

B: „Anna gewinnt das Spiel".

Anna gewinnt entweder in der ersten oder in der ersten Runde nicht und in der zweiten Runde.

In der zweiten Runde sind nur noch zwei rote und 2 schwarze Karten im Spiel.

Es sei C: „Bernd gewinnt das Spiel".

$S(C) = \{\overline{s}s, s\overline{s}, ss\}$

$P(C) = P(\overline{s}s, s\overline{s}, ss) = 1 - P(\overline{s}\overline{s}) = 1 - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(\overline{C}) = \frac{1}{6}$

$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap \overline{C}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$