Aufgabe M03-A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (3 - e^{-2x})^3$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A2

Zeigen Sie, dass $F(x) = ln(1 + x^2)$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$ ist.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A3

Lösen Sie die Gleichung $e^x + 3 - 10e^{-x} = 0$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x}$.

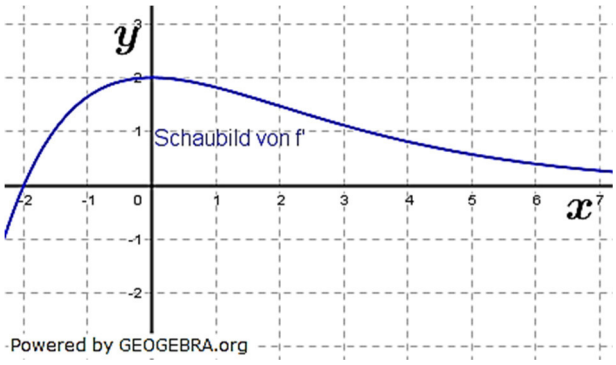
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen von f im Punkt $P(-1|2e)$.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A5

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f.
Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind.



a) Bei $x = 0$ besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt.

b) Bei $x = -2$ besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.

c) Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.

d) $f(x) > 0$ für $x > -2$.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A6

Gegeben sind die Ebenen E_1: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und E_2 : $x_3 = 2$.

a) Stellen Sie die Ebenen E_1 und E_2 in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

b) Zeichnen Sie die Schnittgerade g von E_1 und E_2 ein und bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe M03-A7

Ein Chuck-your-luck ist ein Würfelspiel aus Amerika. Der Spieler setzt einen Dollar und würfelt dann dreimal. Für jede Sechs erhält er von der Bank einen Dollar.

a) Die Zufallsvariable X soll den Gewinn des Spielers angeben. Geben Sie die möglichen Werte von X und ihre jeweilige Wahrscheinlichkeit an.

b) Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03-A8

Die vier Punkte A, B, C und D bilden ein Parallelogramm im Raum. Des Weiteren ist ein Punkt P gegeben.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um festzustellen ob der Punkt P im Parallelogramm $ABCD$ liegt.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M03-A1

$f(x) = (3 - e^{-2x})^3$ Kettenregel erforderlich

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
$u = 3 - e^{-2x}$ $u' = 2e^{-2x}$
$v(u(x)) = u^3$ $v'(u(x)) = 3u^2$
$f'(x) = 3(3 - e^{-2x})^2 \cdot 2e^{-2x} = 6e^{-2x}(3 - e^{-2x})^2$

Lösung M03-A2

$F(x) = ln(1 + x^2)$ Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$

Hinweis:
Zur Integralbildung von $f(x)$ ist nicht-lineare Substitution erforderlich. Da dies nicht zum Lehrumfang der Kursstufe gehört, kann der Nachweis nur durch die erste Ableitung von $F(x)$ erbracht werden.
$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2} = f(x)$ **q.e.d.**

Lösung M03-A3

$e^x + 3 - 10e^{-x} = 0$ Substitution, quadratische Gleichung

---

$e^x + 3 - 10e^{-x} = 0$ | $\cdot e^x$
$e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$
Substitution:
$e^x = z$
$z^2 + 3z - 10 = 0$ | quadratische Gleichung
$z_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 10}$ | p/q-Formel
$z_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = -1{,}5 \pm 3{,}5$
$z_1 = 2;\ \ z_2 = -5$
Resubstitution:
$e^{x_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 ln(e) = ln(2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = ln(2)$
$e^{x_2} = -3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{L} = \{ln(2)\}$

Lösung M03-A4

<u>Lösungslogik</u>

a) Normalengleichung über Punkt-Steigungsformel
$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ mit $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$ (wegen gegebenem Punkt $P(-1|2e)$.

b) Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse mit $n(x) = 0$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) $n(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
Wegen $P(-1|2e)$ ist $x_0 = -1$ und $f(x_0) = 2e$
$f'(x) = -2e^{-x}$
$f'(-1) = -2e$
$n(x) = -\frac{1}{-2e} \cdot (x + 1) + 2e$
$n(x) = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $n(x) = 0$

$\frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + 2e = 0 \quad | \quad \cdot 2e$

$x + 1 + 4e^2 = 0$

$x = -4e^2 - 1$

Lösung M03-A5

a) *Bei $x = 0$ besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = 0$ einen Extrempunkt. Nur Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitungsfunktion.

b) *Bei $x = -2$ besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.*
Die Aussage ist wahr. f' hat bei $x = -2$ eine Nullstelle mit VZW.

c) *Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild von f' hat bei $x_0 = 0$ eine Extremstelle, die bei f zu einer Wendestelle führt.

d) $f(x) > 0$ für $x > -2$.
Die Aussage ist unentscheidbar, weil jede Funktion h mit $h(x) = f(x) + C$ eine Stammfunktion von f' ist.

Lösung M03-A6

Lösungslogik

Wir stellen zunächst die Koordinatengleichung der Ebene E_1 auf und errechnen deren Spurpunkte. Die Ebene E_2 ist eine parallele Ebene zur x_1x_2-Ebene im Abstand $x_3 = 2$.
Wir zeichnen die beiden Ebenen ein und bestimmen danach die Gleichung der Schnittgeraden durch Gleichsetzung von E_1 mit E_2.

Klausuraufschrieb

Koordinatengleichung von E_1:

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = d$

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = d \quad |$ Punktprobe mit Aufpunkt

$d = 12$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \quad | \; : 12$

$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1 \quad |$ Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(6|0|0); \quad S_{x_2}(0|4|0); \quad S_{x_3}(0|0|6)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Schnittgerade g:

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

$x_3 = 2$

Wir wählen eine Unbekannte frei, z.B. $x_2 = t$.

$2x_1 + 3t + 4 = 12$

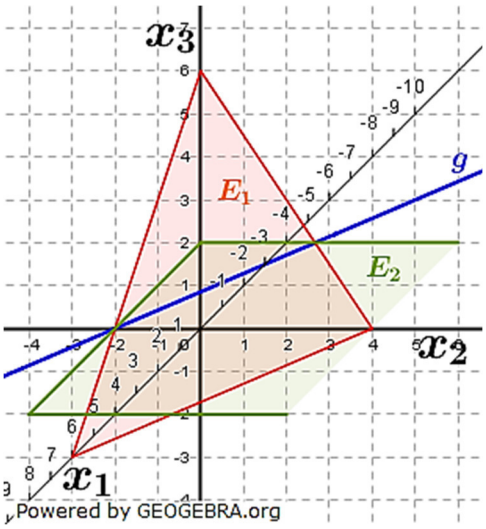
$x_1 = 4 - \frac{3}{2}t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{3}{2}t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lösung M03-A7

a) $P(6) = \frac{1}{6}$.

X	3 Sechsen	2 Sechsen	1 Sechs
Häufigkeit	$\binom{3}{3} = 1$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{1} = 3$
$P(X)$	$1 \cdot \frac{1}{6}^3$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$

X kann pro Spiel die Werte 1, 2 oder 3 annehmen.

$P(X = 3) = \frac{1}{216}$; $P(X = 2) = \frac{15}{216}$; $P(X = 1) = \frac{75}{216}$

b) faires Spiel?

Aufgabe zum Erwartungswert.

x_i	$3 - 1\,\$$	$2 - 1\,\$$	$1 - 1\,\$$	$-1\,\$$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{2}{216}\,\$$	$\frac{15}{216}\,\$$	$0\,\$$	$-\frac{125}{216}\,\$$
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$\frac{2}{216} +$	$\frac{15}{216} +$	$0 +$	$-\frac{125}{216}$

$E(X) = -\frac{108}{216}\,\$ = -0{,}5\,\$$

Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht gesehen $0{,}5\,\$$ pro Spiel.

Lösung M03-A8

- Man stellt die Parametergleichung der Ebene E auf, in der das Parallelogramm $ABCD$ liegt mit $E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$
- Wir machen eine Punktprobe mit P in E.
- Erfüllt der Punkt P die Ebenengleichung, so liegt P in E.
- Ist zusätzlich noch $0 < r; s < 1$, so liegt P innerhalb des Parallelogramms.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de