Lösung M04-A1

$f(x) = x^4 \cdot (e^{2x} + 1)$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = x^4$ $u' = 4x^3$
$v = e^{2x} + 1$ $v' = 2e^{2x}$
$f'(x) = 4x^3 \cdot (e^{2x} + 1) + 2x^4 \cdot e^{2x}$

Lösung M04-A2

$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist der $ln(x)$

$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx = [3 \cdot ln(x) - x]_1^e = 3 \cdot ln(e) - e - (3 \cdot ln(1) - 1) = 3 - e + 1$
$= 4 - e$

Lösung M04-A3

$(e^{-x} + 3)^2 = 4$ Wurzel ziehen, Logarithmus

$(e^{-x} + 3)^2 = 4$ | $\cdot\sqrt{\ }$
$e^{-x} + 3 = \pm 2$
$e^{-x_1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\};$ $e^{-x_1} = -5 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\};$
Die Gleichung hat keine Lösung.

Lösung M04-A4

Klausuraufschrieb

a) Der Graph der Funktion weist eine waagrechte Asymptote $y = 3$ auf.
Daraus folgt: $b = 3$.
$P(0|2) \in f$
$f(0) = 2 = a \cdot e^0 + 3$
$a = -1$
$f(x) = -e^x + 3$

b) $f'(x) = -e^x$
$f'(x) = -1 = -e^x$
$e^x = 1$
$x = ln(1) = 0$
An der Stelle $x = 0$ besitzt der Funktionsgraph die Steigung $m = -1$.

Lösung M04-A5

a) *Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.*
Die Steigung von f ist für $x > 0$ kleiner als 1. Da $g(x) > 2$ für $x > 0$ scheidet g als Ableitung von f aus. Somit gilt $g'(x) = f(x)$.

b) $g(x) = e^{ax} + b$
Aus der Graphik lesen wir ab:
$g(0) = 3$ und $g'(0) = f(0) = -0{,}5$.
$g(0) = e^0 + b = 3$
$b = 2$
$g'(x) = a \cdot e^{ax}$
$a \cdot e^0 = -0{,}5 \;=>\; a = -0{,}5$
$g(x) = e^{-0{,}5x} + 2$.

Lösung M04-A6

Lösungslogik

Wir bestimmen die Spurpunkte der Ebene E und F und zeichnen damit die Ebenen und die Schnittgerade in das Koordinatensystem. Danach berechnen wir die Gleichung der Schnittgeraden durch Gleichsetzung von E mit F.

Klausuraufschrieb

$x_1 + 2x_2 = 4$ | $:4$

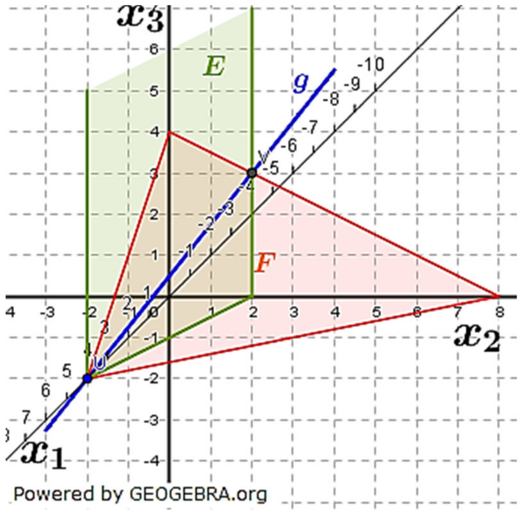
$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} = 1$ | Achsenabschnittsform E

$S_{E_{x1}}(4|0|0);\quad S_{Ex2}(0|2|0)$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ | $:8$

$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform F

$S_{F_{x1}}(4|0|0);\quad S_{Fx2}(0|8|0);\quad S_{Fx_3}(0|0|4)$



$E \cap F$

$x_1 + 2x_2 = 4$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

Wir wählen eine Variable frei, z.B. $x_3 = t$

(1) $x_1 + 2x_2 = 4$

(2) $2x_1 + x_2 = 8 - 2t$

(1) $x_1 = 4 - 2x_2$

(1)->(2)

$2 \cdot (4 - 2x_2) + x_2 = 8 - 2t$

$8 - 3x_2 = 8 - 2t$

$x_2 = \frac{2}{3}t$

x_2->(1)

$x_1 + 2 \cdot \frac{2}{3}t = 4$

$x_1 = 4 - \frac{4}{3}t$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{3}t \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung M04-A7

A: „Genau eine Herzkarte liegt auf dem Tisch."

$P(Kreuz) = \frac{4}{4+n}$; $P(Herz) = \frac{n}{4+n}$

$P(A) = \{(Kreuz, Herz); (Herz, Kreuz)\}$

Es ist Ziehen ohne Zurücklegen:

$P(A) = 2 \cdot \frac{4}{4+n} \cdot \frac{n}{3+n} = \frac{8n}{(4+n)(3+n)}$

n für $P(A) = \frac{8}{15}$:

$\frac{8n}{(4+n)(3+n)} = \frac{8}{15}$ | $\cdot \frac{15}{8}$

$\frac{15n}{(4+n)(3+n)} = 1$ | $\cdot (4+n)(3+n)$

$15n = (4+n)(3+n) = 12 + 7n + n^2$ | $-15n$

$n^2 - 8n + 12 = 0$

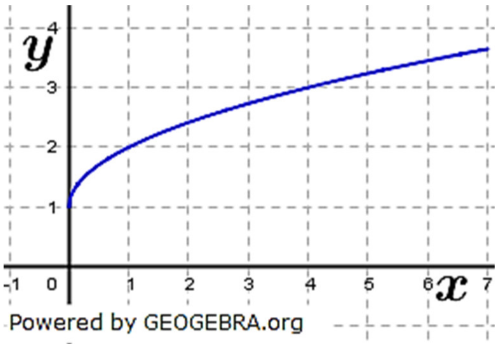
$n_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$

$n_1 = 6$; $n_2 = 2$

Bei 6 oder 2 Herzkarten beträgt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A $\frac{8}{15}$.

Lösung M04-A8

a) $f(x) > 0$ Das Schaubild verläuft nur oberhalb der x-Achse.
$f'(x) > 0$ Das Schaubild ist streng monoton steigend.
$f''(x) < 0$ Das Schaubild ist rechtsgekrümmt.



b) $f''(x) < 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' < 0 \Rightarrow$ der Graph der ersten Ableitung ist streng monoton fallend.
Das Schaubild einer Funktion, deren Steigung durchwegs abnimmt, ist rechtsgekrümmt.