Aufgabe M05-A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{-2x} + 2\sqrt{x}$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A2

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1)dx$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A3

Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung $(sin(x))^2 - 2\,sin(x) = 3$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{1-x} + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{1+x}$.

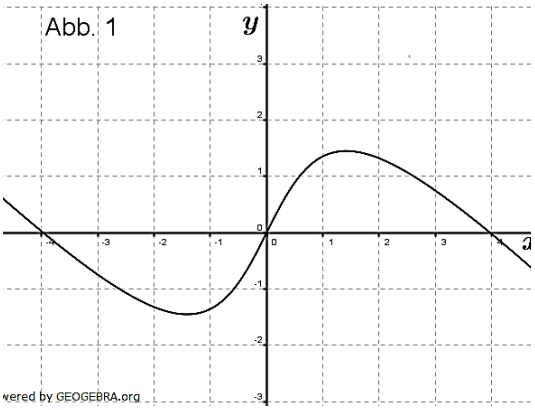
a) Geben Sie die waagrechte Asymptote der Funktion f an.

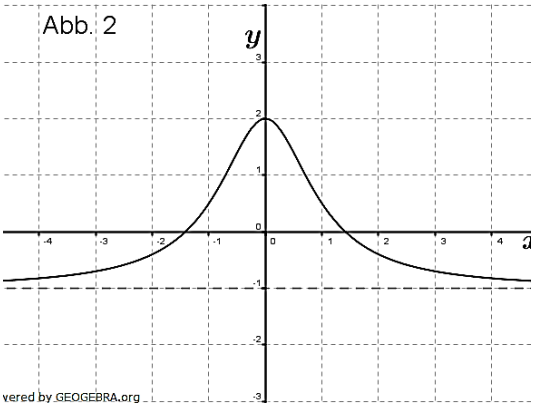
b) Bestimmen Sie die Stelle, an der f und g die gleiche Steigung haben.

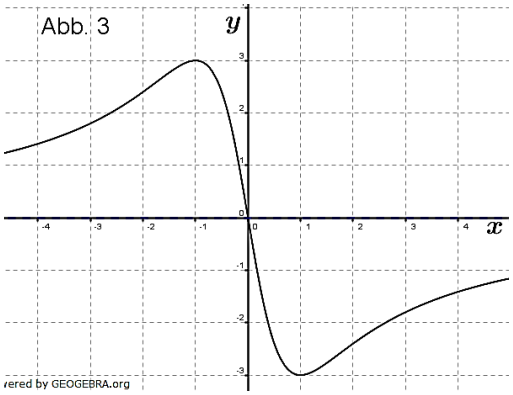
(Quelle Landesbildungsserver BW)

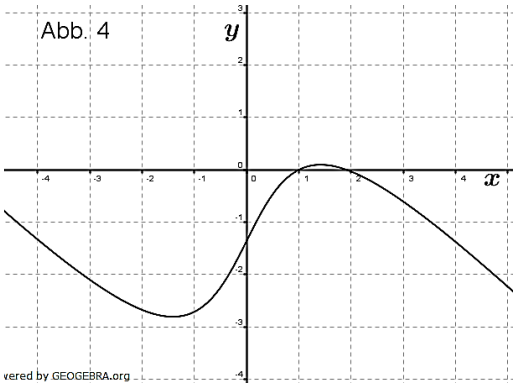
Aufgabe M05-A5

Die Abbildungen zeigen Schaubilder von Funktionen einschließlich aller waagrechten Asymptoten.
Eines dieser Schaubilder gehört zur Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$.









a) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie den Wert von a.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f' und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)dt$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Zuordnung.

(Quelle Abitur BW 2010, auch Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A6

a) Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, welche die Spurpunkte $(0|0|4)$ und $(0|-3|0)$ und keinen Schnittpunkt mit der x_1-Achse hat.

b) Geben Sie die Gleichung der Ebene F an, welche den Punkt $A(3|-3|-1)$ enthält und parallel zur Ebene E: $x_1 = 2$ ist.

c) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, welche durch den Punkt $P(5|1|-4)$ geht und senkrecht zur Ebene E_1: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ steht.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A7

In einem Behälter befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln weiß ist.

b) Berechnen Sie, wie viele weiße Kugeln sich in dem Behälter befinden müssten, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, $0{,}91$ betragen hätte.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05-A8

Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Rotationskörpers berechnet.
Skizzieren Sie den Sachverhalt. Geben Sie an, was für ein Körper entsteht.

(Quelle Landesbildungsserver BW)

Lösung M05-A1

$f(x) = e^{-2x} + 2\sqrt{x}$ Potenz- und Kettenregel erforderlich

---

$f'(x) = -2e^{-2x} + 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -2e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lösung M05-A2

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx$ Summenregel, Potenzregel, trigonometrische Regel

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + 0\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Lösung M05-A3

$(sin(x))^2 - 2\,sin(x) = 3$ Substitution / Resubstitution

Substitution:

$sin(x) = z$

$z^2 - -2z - 3 = 0$ | quadratische Gleichung

$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ | p/q-Formel

$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$

$z_1 = 3;\ \ z_2 = -1$

Resubstitution:

$sin(x_1) = 3 \ \Rightarrow\ \mathbb{L} = \{\}$

$sin(x_2) = -1 \ \Rightarrow\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$ | einzigste Lösung im Intervall $0 \le x \le 2\pi$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}$

Lösung M05-A4

<u>Lösungslogik</u>

a) Wir betrachten das globale Verhalten von f.

b) Wir setzen $f'(x) = g'(x)$ und lösen die Gleichung nach x auf.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) Wegen $\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1}{1-x} = 0$ ist $\lim\limits_{x \to |\infty|} f(x) = 3$.

f hat die waagrechte Asymptote $y = 3$.

b) $f'(x) = g'(x)$:

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\quad g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$

$(1-x)^2 = (1+x)^2 \ \ => \ \ x = 0$

f und g haben bei $x_0 = 0$ dieselbe Steigung.

Lösung M05-A5

a) Die Funktion x ist wegen des Nenners $1+x^2$ achsensymmetrisch. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$ hat sie die waagrechte Asymptote $y=-1$. Dies ist nur in Abbildung 2 der Fall.
Der Graph der Funktion schneidet die y–Achse in $S_y(0|2)$, also $f(0)=2$.
$2 = \frac{a}{1+0} - 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 3$

b) Extrempunkte von f führen zu Nullstellen von f'. f besitzt eine einzige Extremstelle bei $x=0$ als Hochpunkt. Die Nullstelle von f' muss also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ aufweisen. Dies ist nur in Abbildung 3 der Fall.
Abbildung 3 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.
Extremstellen der Stammfunktion führen zu Nullstellen der Ableitungsfunktion. Wendepunkte der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitungsfunktion. Dies ist sowohl in Abbildung 1 als auch in Abbildung 4 der Fall.
Wegen $I(x) = \int_2^x f(t)dt$ muss gelten $I(2) = \int_2^2 f(t)dt$. Da jedoch $\int_2^2 f(t)dt = 0$, muss $I(2)=0$ sein. Dies ist nur in Abbildung 4 der Fall.
Abbildung 4 ist das Schaubild der Integralfunktion I.

Lösung M05-A6

<u>Lösungslogik</u>

a) Über die gegebenen Spurpunkte stellen wir die Achsenabschnittsform der Ebene E auf.

b) Die Ebene E hat die Gleichung $E\colon\ x_1 = 2$. Eine zu parallele Ebene F hat denselben Normalenvektor und die Gleichung $F\colon\ x_1 = d$. Über eine Punkteprobe mit A errechnen wir dann d von F neu.

c) Eine Gerade steht dann senkrecht auf einer Ebene, wenn ihr Richtungsvektor ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene ist.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) $E\colon\ -\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$

b) $E\colon\ x_1 = 2$
$F \parallel E\colon\ x_1 = d$
$3 = d$ | Punktprobe mit $A(3|-3|1)$
$F\colon\ x_1 = 3$

c) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung M05-A7

Mehrstufiges Zufallsexperiment mit $P(weiß) = \frac{2}{5}$ und $P(schwarz) = \frac{3}{5}$ im ersten Zug.

a) A: „Mindestens eine der Kugeln ist weiß"
$\overline{A}$: „Beide Kugeln sind schwarz"
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(schwarz, schwarz) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25}$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{16}{25} = 64\,\%$.

b) Wie a), jedoch mit n weißen Kugeln, dann ist $P(schwarz) = \frac{3}{3+n}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(schwarz, schwarz) = 1 - \frac{3}{3+n} \cdot \frac{3}{3+n} = \frac{(3+n)^2-9}{(3+n)^2}$

$\frac{(3+n)^2-9}{(3+n)^2} \geq 0{,}91 \quad | \quad \cdot (3+n)^2$

$(3+n)^2 - 9 \geq 0{,}91 \cdot (3+n)^2 \quad | \quad -0{,}91 \cdot (3+n)^2$

$0{,}09 \cdot (3+n)^2 - 9 \geq 0 \quad | \quad +9;\ :0{,}09$

$(3+n)^2 \geq 100 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$|3+n| \geq 10$

$n_1 \geq 7; \quad n_2 \geq -13$

Es müssen mindestens 7 weiße Kugeln sein.

Lösung M05-A8

Die Funktionsgleichung des Integranden mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ist eine Gerade. Diese rotiert im Intervall $I = [0; 4]$ um die x-Achse.
Dabei entsteht ein Doppelkegel mit einem Grundkreisradius von $r = 1$ und der Höhe $h = 2$ bei beiden Kegeln.