

Aufgabe M12-A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 5x \cdot e^{2-x}$.



Aufgabe M12-A2

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f mit $f(x) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, deren Graph durch den Punkt $P(\pi|1)$ verläuft.

Aufgabe M12-A3

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $(e^{2x} - 4) \cdot (e^x + 1) = 0$.

Aufgabe M12-A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$.

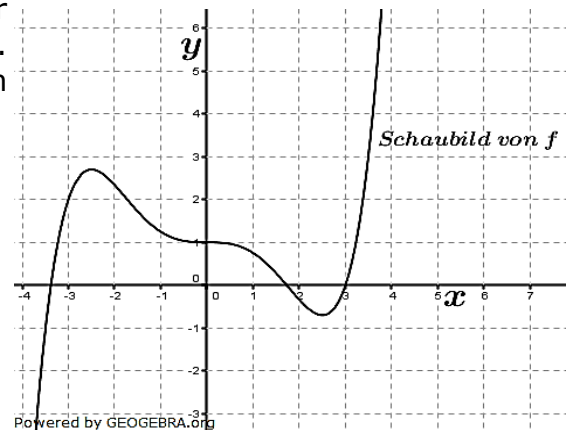
- Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von f .
- Der Funktionsgraph hat im Punkt $P(1|f(1))$ die Normale n .
Ermitteln Sie eine Gleichung von n .

Aufgabe M12-A5

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f . F ist eine Stammfunktion von f . Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

- F ist im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.
- f' hat im Bereich $-3,5 \leq x \leq 3,5$ drei Nullstellen.
- $\int_0^3 f'(x) dx = -1$
- $O(0|0)$ ist der Hochpunkt des Schaubildes von f' .

(Quelle Abitur BW 2011)



Aufgabe M12-A6

Gegeben sind die Punkte $A(1|3|0)$, $B(3|7|-7)$ und $C(2|8|1)$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

Aufgabe M12-A7

Ein Tierarzt behandelt eine Infektionskrankheit bei Kühen mit einem Antibiotikum, das nach langjähriger Erfahrung in 90 % aller Fälle zur Heilung führt.

Auf einem Bauernhof werden drei kranke Tiere mit diesem Medikament behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Tiere gesund werden?

Aufgabe M12-A8

Die folgenden Zeilen zeigen einen Teil der Lösung einer Aufgabe.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$2 \cdot (4 + r) - (3 + 4r) + 4(-2 + 2r) - 3 = 0$$

- Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. Was war bei dieser Aufgabe gegeben?
- Lösen Sie die Aufgaben vollständig.

Lösung M12-A1

$$f(x) = 5x \cdot e^{2-x}$$

Produktregel und Kettenregel erforderlich

$$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$$

$$u = 5x$$

$$u' = 5$$

$$v = e^{2-x}$$

$$v' = -e^{2-x}$$

$$f'(x) = 5e^{2-x} - 5xe^{2-x} = 5e^{2-x}(1-x)$$

Lösung M12-A2

$$f(x) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

trigonometrische Regeln

$$F(x) = \int \left(-2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C$$

Punktprobe mit $P(\pi|1)$:

$$1 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$C = 1$$

| wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$F(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

Lösung M12-A3

$$(e^{2x} - 4) \cdot (e^x + 1) = 0$$

Satz vom Nullprodukt

$$e^{2x} - 4 = 0$$

| 1. Faktor

$$e^{2x} = 4$$

| \ln

$$2x = \ln(4)$$

| :2

$$x = \frac{1}{2} \ln(4)$$

$$e^x + 1 = 0$$

| 2. Faktor

$$e^x = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} \ln(4)\right\}$$

Lösung M12-A4

Lösungslogik

a) Hochpunkt von f über $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.

b) Normale über Punkt-Steigungsformel $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$.

Klausuraufschrieb

a) $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$

1. Ableitung mittels Produktregel:

$$u = x + 2$$

$$u' = 1$$

$$v = e^{-x}$$

$$v' = -e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x + 2) = e^{-x} \cdot (1 - x - 2) = e^{-x} \cdot (-x - 1)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(-x - 1) - e^{-x} = e^{-x}(x + 1 - 1) = x \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = 0:$$

$$e^{-x} \cdot (-x - 1) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$e^{-x} = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f''(-1) = -1 \cdot e < 0 \quad | \quad \text{Hochpunkt}$$

$$f(-1) = (-1 + 2) \cdot e^1 = e$$

Die Koordinaten des Hochpunktes sind $HP(-1|e)$

b) $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$

$$f'(1) = -2e^{-1}$$

$$f(1) = (1 + 2) \cdot e^{-1} = 3e^{-1}$$

$$n(x) = -\frac{1}{-2e^{-1}} \cdot (x - 1) + 3e^{-1}$$

$$n(x) = \frac{1}{2}ex - \frac{1}{2}e + \frac{3}{e}$$

Lösung M12-A5

- a) Die Funktionswerte des Schaubildes von f sind für $-3 \leq x \leq 1$ positiv, also ist F in diesem Bereich monoton wachsend.
- b) f hat für $-3,5 \leq x \leq 3,5$ zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt. Also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen, wobei die Nullstelle bei $x_0 = 0$ (Sattelpunkt) sogar eine doppelte Nullstelle ist.
- c) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0)$. Aus dem Schaubild liest man ab:
 $f(3) = 0$ und $f(0) = 1$, also $f(3) - f(0) = -1 = \int_0^3 f'(x)dx$
- d) $O(0|0)$ ist Sattelpunkt von f . Dieser führt zu einem Extremwert, der die x -Achse berührt, und gleichzeitig zu einer Nullstelle bei f' wird. Die Steigung links und rechts des Sattelpunktes ist negativ, also berührt die Extremstelle von f' die x -Achse von unten, es liegt kein Vorzeichenwechsel vor, der Extrempunkt muss ein Hochpunkt sein.

Lösung M12-A6

Lösungslogik

Wir berechnen die Fläche des Dreiecks über die Formel:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Klausuraufschrieb

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 7-3 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 8-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{576 + 36 + 36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{648} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Das Dreieck ABC hat einen Flächeninhalt von $9 \cdot \sqrt{2}$ FE.

Lösung M12-A7

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0,9$ für Heilung.

A: „Mindestens zwei der drei Tiere werden gesund“.

$$P(A) = \binom{3}{2} \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 + \binom{3}{3} \cdot 0,9^3 = 3 \cdot 0,081 + 0,729 = 0,972 = 97,2 \%$$

Lösung M12-A8

a) Gegeben sind die Gerade g und eine Ebene E mit $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3 = 0$.
Die Gerade g wird mit E geschnitten, gesucht ist der Schnittpunkt von g mit E .

b) $2 \cdot (4 + r) - (3 + 4r) + 4(-2 + 2r) - 3 = 0$

$$8 + 2r - 3 - 4r - 8 + 8r - 3 = 0$$

$$6r - 6 = 0$$

$$r = 1$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g schneidet E in $S(5|7|0)$