Lösung M12-A1

$f(x) = 5x \cdot e^{2-x}$ Produktregel und Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$

$u = 5x$ $u' = 5$

$v = e^{2-x}$ $v' = -e^{2-x}$

$f'(x) = 5e^{2-x} - 5xe^{2-x} = 5e^{2-x}(1-x)$

Lösung M12-A2

$f(x) = -2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ trigonometrische Regeln

---

$F(x) = \int \left(-2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C$

Punktprobe mit $P(\pi|1)$:

$1 = 4\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$

$C = 1$ | wegen $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$F(x) = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

Lösung M12-A3

$(e^{2x} - 4) \cdot (e^x + 1) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$e^{2x} - 4 = 0$ | 1. Faktor

$e^{2x} = 4$ | ln

$2x = ln(4)$ | $:2$

$x = \frac{1}{2}ln(4)$

$e^x + 1 = 0$ | 2. Faktor

$e^x = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}ln(4)\right\}$

Lösung M12-A4

<u>Lösungslogik</u>

a) Hochpunkt von f über $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.

b) Normale über Punkt-Steigungsformel $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x-1) + f(1)$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$

1. Ableitung mittels Produktregel:

$u = x + 2$ $u' = 1$

$v = e^{-x}$ $v' = -e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) = e^{-x} \cdot (1 - x - 2) = e^{-x} \cdot (-x-1)$

$f''(x) = -e^{-x}(-x-1) - e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = x \cdot e^{-x}$

$f'(x) = 0$:

$e^{-x} \cdot (-x-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$e^{-x} = 0 \quad => \quad \mathbb{L} = \{\}$

$-x - 1 = 0 \quad => \quad x = -1$

$f''(-1) = -1 \cdot e < 0$ | Hochpunkt
$f(-1) = (-1+2) \cdot e^1 = e$
Die Koordinaten des Hochpunktes sind $HP(-1|e)$

b) $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x-1) + f(1)$
$f'(1) = -2e^{-1}$
$f(1) = (1+2) \cdot e^{-1} = 3e^{-1}$
$n(x) = -\frac{1}{-2e^{-1}} \cdot (x-1) + 3e^{-1}$
$n(x) = \frac{1}{2}ex - \frac{1}{2}e + \frac{3}{e}$

Lösung M12-A5

a) Die Funktionswerte des Schaubildes von f sind für $-3 \le x \le 1$ positiv, also ist F in diesem Bereich monoton wachsend.

b) f hat für $-3{,}5 \le x \le 3{,}5$ zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt. Also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen, wobei die Nullstelle bei $x_0 = 0$ (Sattelpunkt) sogar eine doppelte Nullstelle ist.

c) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0)$. Aus dem Schaubild liest man ab:
$f(3) = 0$ und $f(0) = 1$, also $f(3) - f(0) = -1 = \int_0^3 f'(x)dx$

d) $O(0|0)$ ist Sattelpunkt von f. Dieser führt zu einem Extremwert, der die x–Achse berührt, und gleichzeitig zu einer Nullstelle bei f' wird. Die Steigung links und rechts des Sattelpunktes ist negativ, also berührt die Extremstelle von f' die x–Achse von unten, es liegt kein Vorzeichenwechsel vor, der Extrempunkt muss ein Hochpunkt sein.

Lösung M12-A6

<u>Lösungslogik</u>

Wir berechnen die Fläche des Dreiecks über die Formel:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

<u>Klausuraufschrieb</u>

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 7-3 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 8-3 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{576+36+36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{648} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot \sqrt{2}$$

Das Dreieck ABC *hat einen Flächeninhalt von* $9 \cdot \sqrt{2}\ FE$.

Lösung M12-A7

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0{,}9$ für Heilung.

A: „Mindestens zwei der drei Tiere werden gesund“.

$$P(A) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + \binom{3}{3} \cdot 0{,}9^3 = 3 \cdot 0{,}081 + 0{,}729 = 0{,}972 = 97{,}2\,\%$$

Lösung M12-A8

a) Gegeben sind die Gerade g und eine Ebene E mit $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3 = 0$.
Die Gerade g wird mit E geschnitten, gesucht ist der Schnittpunkt von g mit E.

b) $2 \cdot (4 + r) - (3 + 4r) + 4(-2 + 2r) - 3 = 0$

$8 + 2r - 3 - 4r - 8 + 8r - 3 = 0$

$6r - 6 = 0$

$r = 1$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g schneidet E in $S(5|7|0)$